UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA
CURSO PRÉ-UNIVERSITÁRIO POPULAR

Matemática

Formatação: Felipe Braga



2014

Professora: Izabella Pimenta
Coordenação: Letícia Couto Bicalho

SUMÁRIO

GEOMETRIA PLANA

ALGUNS CUIDADOS ESPECIAIS

Ao trabalhar com questões de Geometria Plana, é importante que você não incorra em determinados erros muito comuns. Vamos destacar dois deles.

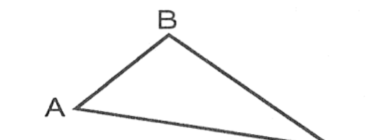
NUNCA PARTICULARIZE UMA FIGURA

Se você vai esboçar a figura relativa a um dado problema, ela deve ser a mais genérica possível.

Imagine, por exemplo, que um certo problema se refira a um quadrilátero ABCD, sem classificá-lo em uma categoria específica. Você nunca deve desenhar um quadrado, ou um retângulo, ou um paralelogramo ...

Desenhe de preferência um quadrilátero com lados e ângulos diferentes, como o da figura.

Suponha que uma determinada questão faça referência a um certo triângulo ABC, sem especificar o tipo do triângulo. Nunca esboce um triângulo eqüilátero (3 lados iguais) ou isósceles (2 lados iguais) ou retângulo (1 ângulo reto). Faça um triângulo genérico, como o da figura.

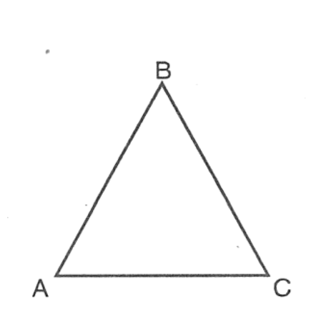


Nunca tire conclusões a partir do "jeitão" da figura.

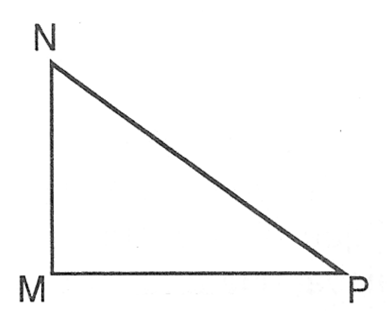
É comum um problema de Geometria Plana vir acompanhado da figura correspondente. É muito importante lembrar que a figura é uma mera ilustração, que serve para facilitar o raciocínio e a visualização das relações existentes.

No entanto, é preciso ter cuidado.

Se num problema aparece, por exemplo, o triângulo ABC da figura, não conclua que se trata de um triângulo eqüilátero só porque os seus lados "parecem" ser iguais.



Da mesma forma, não conclua que o triângulo MNP da figura é retângulo porque um de seus ângulos "parece" ser reto.



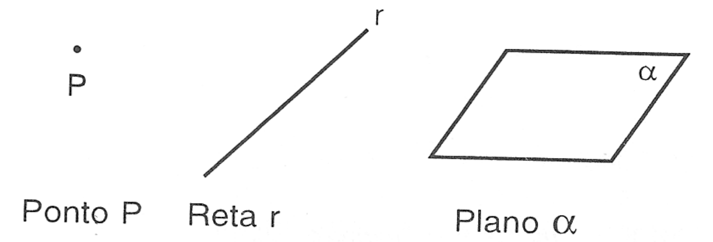
Particularidades a respeito de uma figura devem constar do enunciado do problema ou ser deduzidas a partir dos seus dados; nunca devem ser tiradas por "insinuação" da figura.

O PONTO, A RETA E O PLANO

Os entes geométricos fundamentais são o **ponto, a reta** e o **plano.**

Esses conceitos não se definem, conforme já vimos anteriormente. O ponto não tem dimensão. Para perceber intuitivamente o conceito de ponto, podemos imaginar a extremidade da ponta de um lápis muito bem apontado. A reta é infinita e ilimitada. Podemos imaginá-la como um fio de cabelo completamente esticado, tão fino quanto possível e de dimensão infinita. O plano é também infinito e ilimitado. A superfície de um lago de dimensões infinitas pode ser associada à idéia de plano.

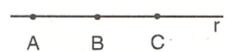
Os pontos, as retas e os planos costumam ser representados por letras e figuras .



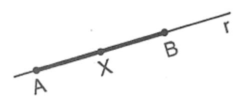
Para os pontos, utilizaremos letras latinas maiúsculas (A, B, C,...); para as retas, letras latinas minúsculas (a, b, c,...); para os planos, letras gregas minúsculas (□□□□□□□□□□□□□□

SEMI-RETAS E SEGMENTOS

Observe a figura, que apresenta uma reta r e três pontos distintos A, B e C pertencentes a r. Consideraremos como intuitiva a afirmação de que o ponto B está entre os pontos A e C.



Consideremos, numa reta r, dois pontos A e B (figura). Chamamos **segmento de reta** AB ou simplesmente **segmento** AB o conjunto constituído pelos pontos A e B e por todos os pontos de r situados entre A e B.

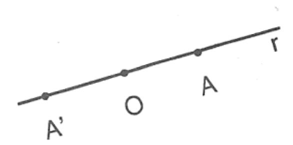


Os pontos A e B são os **extremos** ou as **extremidades** do segmento AB. Os demais pontos são os pontos interiores ao segmento. Na figura, X é ponto inte**rior ao segmento** AB. A reta AB = r é a reta suporte do **segmento** AB.

Se A e B coincidem, o segmento AB é o segmento nulo, reduzido a um ponto.

É claro que AB e BA são o mesmo segmento.

Consideremos agora, sobre uma reta r, três pontos A', O e A, com O compreendido entre A' e A, conforme mostra a figura.



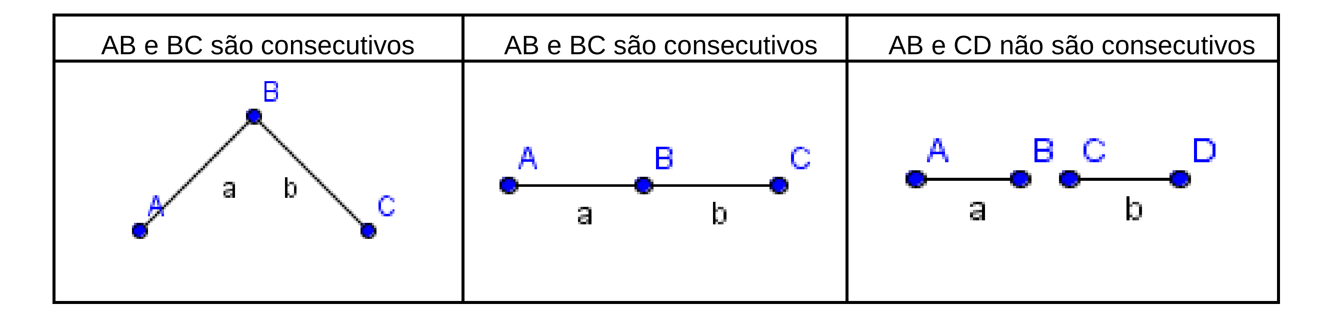
O ponto O divide a reta r em duas partes. Cada uma delas é chamada semi-reta e elas têm em comum apenas o ponto O, que é a origem das duas semi-retas. Chamamos semi-reta OA aquela que tem origem O e passa pelo ponto A. Chamamos semi-reta A'O a que tem origem O e passa pelo ponto A'.

As duas semi-retas OA e OA' se dizem opostas. Cada uma delas é o prolongamento da outra. A reta r é a reta suporte de cada uma das semi-retas OA e OA'.

Segmentos consecutivos, colineares, congruentes e adjacentes.

Dois segmentos são ditos consecutivos se, e somente se, têm um extremo comum e não têm nenhum ponto interior comum.

Ex:



AB e BC são consecutivos	AB e BC são consecutivos	AB e CD não são consecutivos

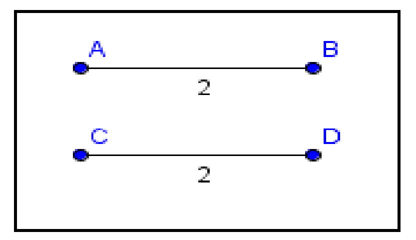
Dizemos que dois segmentos são **colineares** se, e somente se, têm a mesma reta suporte.

Ex: para os dois primeiros é a reta suporte r.

CD e EF são colineares	CD e DE são colineares	AB e BC não são colineares
C D E F b c r	C D E r b c	B A a b C

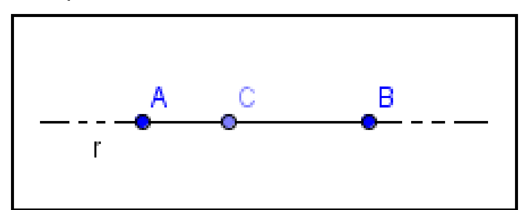
Dizemos que dois segmentos são congruentes se ambos tiverem a mesma medida.

Ex:



no caso AB é congruente a CD. AB ~ CD , cujo o símbolo de congruência é dado por " ~".

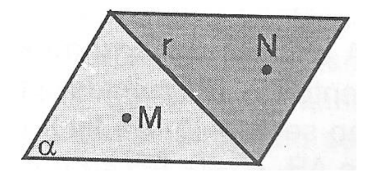
Dois segmentos são chamados **adjacentes** se, e somente se, são consecutivos e têm a mesma reta suporte. São adjacentes, por exemplo, os segmentos AC e CB da figura, já que têm em comum apenas o extremo C e possuem a mesma reta suporte r.



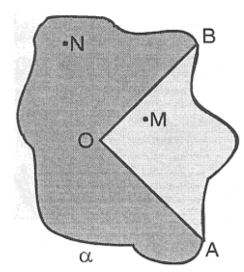
Semi-planos e ângulos

Uma reta r contida em um plano divide este plano em duas regiões denominadas **semi-planos** (figura). Os dois semi-planos têm em comum apenas a reta r, chamada **origem** ou **contorno** dos dois semi-planos.

O semi-plano de origem r que contém o ponto M pode ser chamado semi-plano (rM); o outro é o semi-plano (rN). Dizemos que o ponto M é interior ao semi-plano (rM). Dois semi-planos de um mesmo plano, com a mesma origem r. tais como os da figura, se dizem opôstos. Cada um deles é o prolongamento do outro.



Consideremos agora, duas semi-retas distintas e não-opostas OA e OB, de mesma origem O, contidas em um plano (figura).



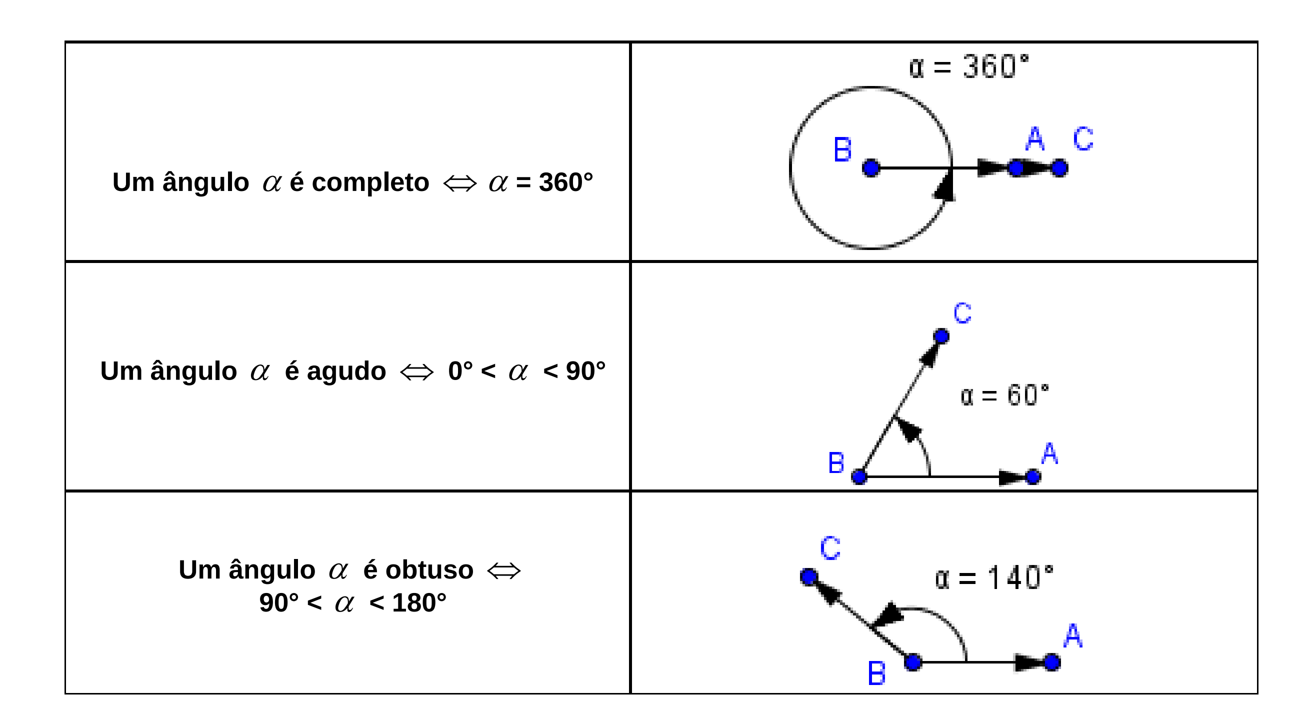
Elas dividem o plano a em duas regiões que possuem em comum apenas as semi-retas OA e OB.

Cada uma dessas regiões é chamada **ângulo**. As semi-retas OA e OB são os **lados** e o ponto O é o **vértice** dos dois ângulos. Chamamos ângulo **côncavo** AÔB aquele que contém os prolongamentos dos lados OA e OB. O ponto N é **interior** ao ângulo côncavo AÔB. Chamamos ângulo **convexo** AÔB aquele que não contém os prolongamentos dos lados OA e OB. O ponto M é **interior** ao ângulo convexo AÔB.

Classificação dos ângulos em função de suas medidas

A melhor forma de se entender essa classificação é a partir de vetores, que diga-se de passagem é muito usada em física 1.

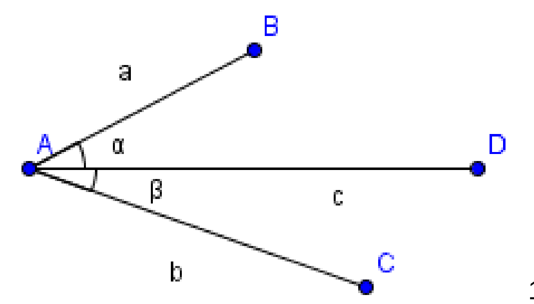
Um ângulo α é nulo $\Leftrightarrow \alpha = 0°$	α = 0° B A C
Um ângulo α é reto $\Leftrightarrow \alpha = 90°$	C α = 90° B A
Um ângulo α é raso $\Leftrightarrow \alpha = 180°$	α = 180° C B A



Um ângulo α é completo ⇔ α = 360°	
Um ângulo α é agudo ⇔ 0° < α < 90°	
Um ângulo α é obtuso ⇔ 90° < α < 180°	

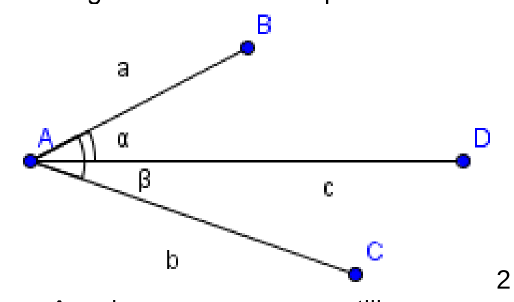
Ângulos consecutivos e ângulos adjacentes

Dizemos que dois ângulos de um mesmo plano são consecutivos se, e somente se, têm um lado comum e compartilham do mesmo vértice. Veja os exemplos a baixo:



1

Os ângulos □□e□□□compartilham o mesmo segmento AD e vértice A.



2

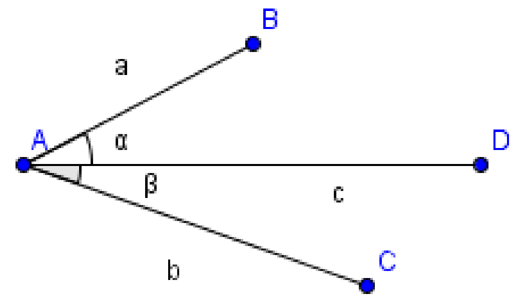
os ângulos □□e□□□compartilham o mesmo segmento AB e vértice A.

O conceito de ângulos consecutivos nos permite definir a soma e a diferença de ângulos.

Considerando ainda a figura 1, podemos escrever:

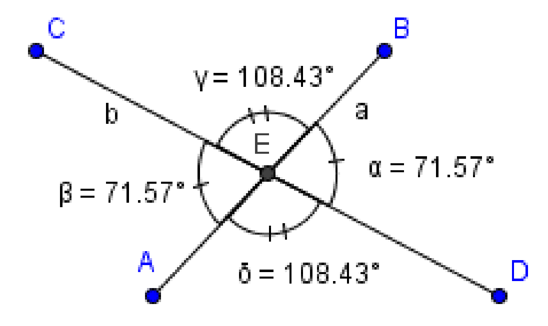
□ + □ = BÂC ou BÂC - □ = □.

Dizemos que dois ângulos são adjacentes se, e somente se, eles são consecutivos e não têm pontos internos comuns.



Ângulos opostos pelo vértice

Dois ângulos convexos se dizem **opostos pelo vértice** se, e somente se, os lados de um deles são os prolongamentos dos lados do outro.



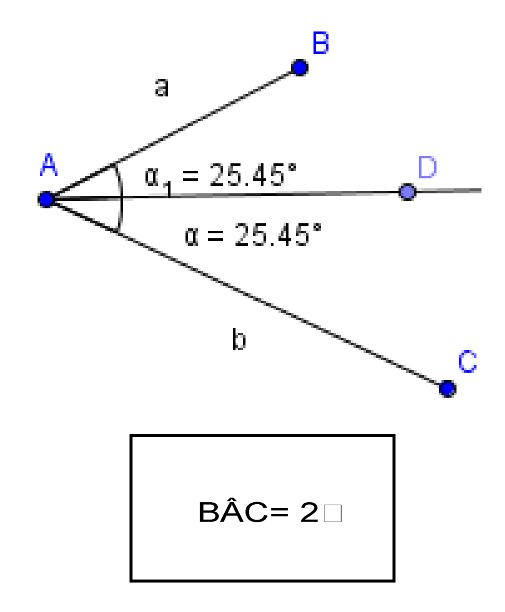
Os ângulos AÔB e A'ÔB' da figura, por exemplo, são opostos pelo vértice, já que os lados OA' e OB' do ângulo A'ÔB' são os prolongamentos dos lados OA e OB do ângulo AÔB.

Bissetriz de um ângulo

Chama-se bissetriz de um ângulo a semi-reta contida no ângulo, de origem em seu vértice, que o divide em dois ângulos congruentes.

E ainda, a bissetriz é o lugar geométrico dos pontos do plano eqüidistante dos lados do ângulo.

Na figura a semi-reta AD é bissetriz do ângulo A.



BÂC= 2

Ângulos Complementares, Ângulos Suplementares e Ângulos Replementares

Ângulos complementares

Dois ângulos são complementares quando a soma é igual a 90°.

Ângulos suplementares

Dois ângulos são suplementares quando a soma é igual a 180°.

Ângulos replementares

Dois ângulos são replementares quando a soma é igual a 360°.

Observação
ângulo α : complemento 90° - α
ângulo α : suplemento 180° - α
ângulo α : replemento 360° - α

O grau como unidade de medida de ângulos

Apesar de a unidade de medida de ângulos ser arbitrária, existe uma unidade de uso universal: o **grau** (símbolo °).

O grau pode ainda ser subdividido em **minutos** (símbolo ') e **segundos** (símbolo "). São as seguintes as equivalências entre as unidades de medida de ângulos:

1 raso = 180°
1 ° = 60'
1’ = 60"

Assim, a medida de um determinado ângulo poderia ser indicada, por exemplo:

$$\beta = 56°23'40''$$

Isso significa que a medida de □□é igual a 56 graus, 23 minutos e 40 segundos.

Operando com medidas de ângulos

O grau é subdividido na base sexagesimal e não na base decimal, como costuma ocorrer com as unidades de medida da maioria das grandezas. Por isso, as operações usuais com as medidas de ângulos fogem dos padrões operacionais usuais.

A forma mais eficaz de se aprender a operar com ângulos é a partir de exemplos, logo:

Exemplos:

01) Simplifique as medidas:

a) 65º 39' 123''
b) 30º 56' 240''

02) Determine:

a) 30º 40' + 15º 35'
b) (31º 32' 45'') : 3
c) 2x (10º 35' 45'')
d) 90º 15' 20'' - 45º 30' 50''

Resolução do exemplo dois.

a) (30º 40' + 15º 35') : faça a conta de forma normal como se fosse uma conta com virgula, de forma que o grau fique abaixo do grau e o minuto abaixo do minuto.

30°40’

+15°35’

= 45°75’ simplificando o resultado obtemos o valor final como 46°15’

b) (31° 32' 45'') : 3 Você deve transformar os valores para que a divisão dê exata. Primeiro você passa os 2' para a casa dos segundos - lembrando de somar 60 quantas vezes você tirou da casa anterior)

31° 30' 165'' (2' equivale a 120'' somado com os 45'' tem-se 165'')
Você deve fazer isso com os graus passando para minutos, aplicando a mesma regra)

30° 90' 165'' (Como 1 grau vale 60 min) Agora você pode dividir normalmente:

30° 90' 165'' : 3 = 10° 30' 55''

c) 2x (10º 35' 45'') : a multiplicação deve ser feita de forma normal e no final simplificado se for o caso.
Logo: 2 x 10° = 20° , 2 x 35’= 70’ e 2 x 45”= 90” assim o resultado fica sendo 20° 70’ 90”

simplificando 21° 11’ 30”.

d) A subtração e feita da mesma forma que a soma casa abaixo de casa, logo:

repare que a subtração não é possível pelo valor acima ser menor q o abaixo logo deve se arrumar o ângulo pra efetuar a conta.

90º 15' 20”
- 45º 30' 50''

logo o ângulo 90° 15’ 20 “ deve ficar da forma 89° 75’ 80” para q possa ser feito a conta de forma correta.

Assim:

89° 75’ 80”
- 45° 30’ 50”

44° 45’ 30”. Lembrando que o ângulo já se encontra simplificado.

03) As bissetrizes de dois ângulos adjacentes formam um Ângulo de 46°. Se um deles mede 32º, qual é a medida do outro?

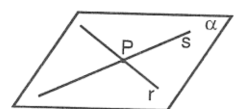
04) O complemento da terça parte de um ângulo excede o complemento desse ângulo em 30º. O ângulo vale:

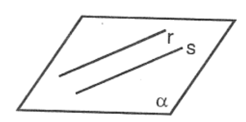
RETAS CONCORRENTES E RETAS PARALELAS

Duas retas distintas de um plano podem ocupar duas posições relativas.
Suponhamos duas retas r e s contidas em um plano α .Podem ocorrer dois casos:

1º) r e s têm apenas um ponto comum. Dizemos então que r e s são concorrentes. E dizemos que r $\cap$ s ={P}.

2º) r e s não têm ponto comum. Neste caso, dizemos que r e s são paralelas. No caso temos $r \cap s = \varnothing$
.



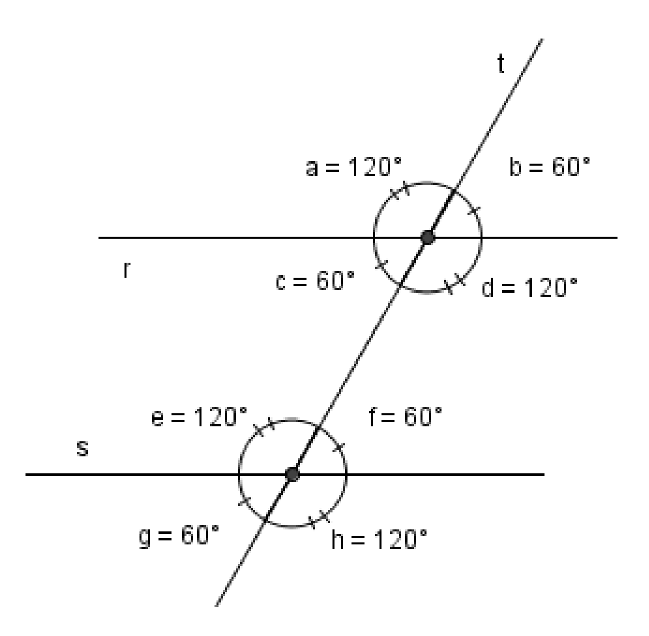


Escrevemos r//s para indicar que r é paralela a s. Dizemos que duas semi-retas ou dois segmentos são paralelos se suas retas suportes são paralelas.

ÂNGULOS EM RETAS PARALELAS

Se duas retas r e s de um plano são interceptadas por uma reta t do plano, dizemos que t é **transversal** em relação a r e s.

Uma reta t transversal em relação a duas retas r e s forma, com estas, oito ângulos convexos que têm denominações especiais (figura) e serão essas denominações especiais que abordaremos adiante a partir da figura.



Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, pode-se demonstrar que os oito ângulos convexos formados são, dois a dois, congruentes ou suplementares.

Primeiramente devemos identificar os ângulos e o significado de suas nomenclaturas, assim:

Ângulos correspondentes são os ângulos congruentes que se situam na mesma posição em relação às paralelas. Na figura eles são representados pelos pares:

1) **a , e**
2) **b , f**
3) **c , g**
4) **d , h**

Os ângulos internos se situam entre as paralelas. Na figura são representados pelos ângulos.

1) **c , d , e , f**

Os ângulos externos se situam no exterior das paralelas. Na figura são representados pelos ângulos.

1) **a , b , g , h**

Os ângulos alternos são dados pela comparação entre os ângulos congruentes situados a direita da transversal com os que estão situados a esquerda, e são classificados de duas formas:

Alternos internos, onde seus pares são os ângulos:

1) **c , f**
2) **d , e**

Alternos externos, onde seus pares são os ângulos:

1) **a , h**
2) **b , g**

Os ângulos colaterais se encontram do mesmo lado da transversal e são suplementares(a soma é igual a 180º). Também são classificados de duas formas:

Colaterais internos, onde os pares são os ângulos:

1) **c , e**
2) **d , f**

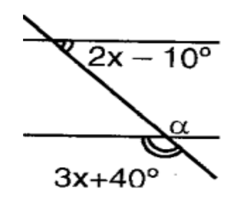
Colaterais externos, onde os pares são os ângulos:

1) **a , g**
2) **b , h**

Lembrando que a comparação entre os ângulos são feitos de uma paralela para a outra.

Exemplos:

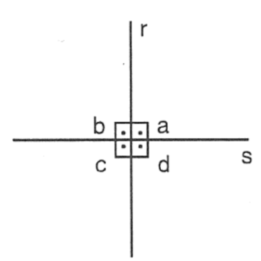
1) Sendo a // b, vamos determinar o valor de x na figura:



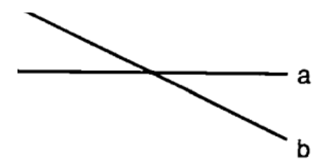
solução: por correspondência podemos dizer que o ângulo 2x – 10° é suplemento do ângulo 3x + 40° logo a soma deles é 180° assim 2x – 10° + 3x + 40° = 180° ;
5x + 30° = 180°
5x = 150° logo x = 30° substituindo o valor de x temos 3(30)+40 = 130° ,como o ângulo □ é alterno ao ângulo 3x + 40° assim □ 130°

RETAS PERPENDICULARES

Dizemos que dois segmentos ou duas semi-retas são **perpendiculares** se, e somente se, formam quatro ângulos retos. Podemos dizer também, nesse caso, que cada uma delas é perpendicular à outra.
Indicamos $r \perp s$ *ou* $\mathrm{s} \perp \mathrm{r}$.



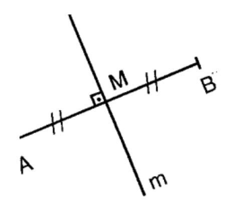
Na figura, temos duas retas perpendiculares, sendo $\hat{a} = \hat{b} = \hat{c} = \hat{d} = 90°$.
Dizemos que dois segmentos ou duas semi-retas são **perpendiculares** se suas retas suportes são perpendiculares.
Se duas retas concorrentes não são perpendiculares, dizemos que elas são **oblíquas.** É o caso das retas **a** e **b** da figura.



Mediatriz de um segmento

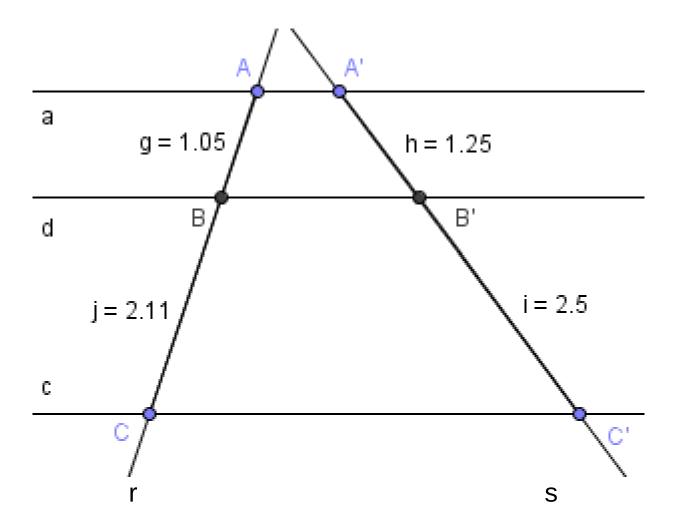
Chama-se mediatriz de um segmento AB a reta m perpendicular a AB passando pelo seu ponto médio.

Na figura, sendo AM = MB e m $\perp$ AB, a reta m é mediatriz de AB.
Dizemos, neste caso, que cada um dos pontos A e B é simétrico do outro em relação à reta m.



FEIXE DE RETAS PARALELAS

Feixe de retas paralelas é um conjunto de retas distintas de um plano, paralelas entre si. As retas a, d e c da figura constituem um feixe de retas paralelas.



Transversal ao feixe de retas paralelas é um reta do plano do feixe que intersecta todas as retas do feixe. Na figura, as retas r e s são transversais aos feixes.

A e A' são pontos correspondentes. Também são correspondentes aos pontos B e B', C e C', $\overline{A'B'}$ e $\overline{AB}$ são segmentos correspondentes. Igualmente $\overline{BC}$ e $\overline{B'C'}$ assim como também $\overline{AC}$ e $\overline{A'C'}$.

TEOREMA DE TALES

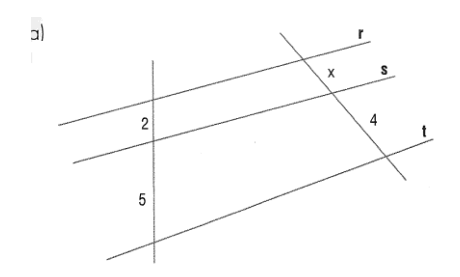
Um feixe de paralelas determina, em duas transversais quaisquer segmento proporcional.

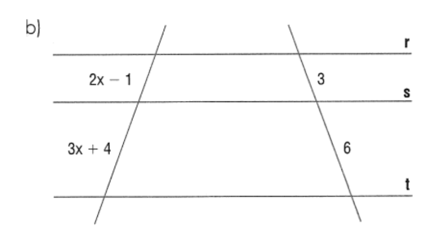
Em decorrência das propriedades das proporções, valem também as igualdades:

$$\frac{AC}{AB}=\frac{A'C'}{A'B'} \quad \text{ou} \quad \frac{AC}{BC}=\frac{A'C'}{B'C'} \quad \text{ou} \quad \frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}$$

Exemplos :

1) Nas figuras as retas r, s e t são paralelas. Vamos determinar o valor de x :



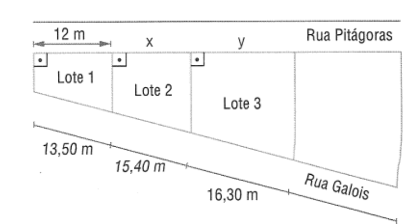


Solução:

a) pelo teorema de tales temos que:7 / 2 = (x+4) / x ,
2x + 8 = 7x,
5x = 8 ,
x = 8 / 5

b) de mesma forma: (2x – 1) + (3x + 4) / 2x – 1 = 9 / 3,
(5x + 3) / 2x – 1 = 3,
5x + 3 = 6x – 3,
x = 6

2) Observe a planta de um loteamento:



Tente responder a esta pergunta: Quais são as medidas aproximadas das frentes dos lotes 2 e 3?

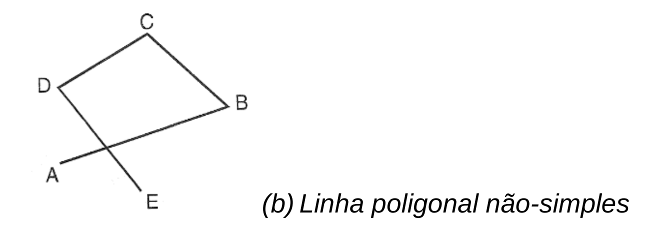
POLÍGONOS

O conjunto constituído de n segmentos consecutivos e não adjacentes de um plano: A_0A_1 , A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$ é chamado **linha poligonal.**

(a) Linha poligonal simples

A figura mostra uma linha poligonal ABCDEFG. Os pontos A, B, C, D, E, F e G são os **vértices,** os segmentos AB,. BC. CD, DE, EF e FG são os **lados** e os pontos A e G são as **extremidades** da linha.

Uma linha poligonal na qual dois dos lados não consecutivos nunca se cortam fora dos vértices é uma linha poligonal **simples.**



(b) Linha poligonal não-simples

A linha poligonal da figura (a) é simples. A linha poligonal ABCDE da figura (b) não é simples, porque os lados não-consecutivos AB e DE se interceptam em um ponto distinto dos vértices.

Se as extremidades de uma linha poligonal coincidem, ela é chamada linha poligonal **fechada.**

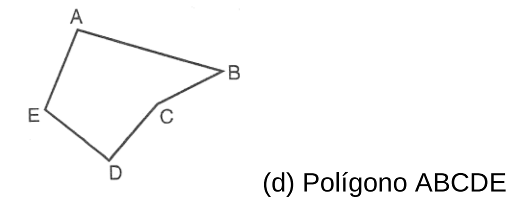
Na figura (c), vemos uma linha poligonal simples e fechada MNPQRSM.

(c) Linha poligonal simples fechada

Toda linha poligonal simples e fechada divide seu plano em duas regiões, uma **interior** e outra **exterior**.

Na figura (c), o ponto X pertence à região interior e o ponto X' pertence à região exterior da linha poligonal.

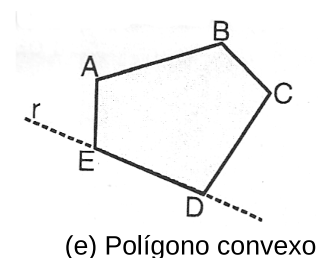
Chamamos **polígono** o conjunto constituído dos pontos de uma linha poligonal fechada simples e dos pontos da região interior a essa linha poligonal.



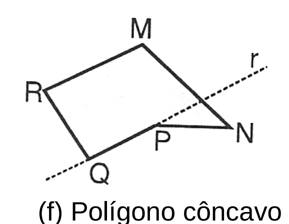
(d) Polígono ABCDE

A figura (d) mostra um polígono ABCDE de 5 lados (AB, BC, CD, DE, EA) e 5 vértices (A, B, C, D, E).

Um polígono é dito **convexo** se ele está todo contido num mesmo semiplano em relação à reta suporte de qualquer de seus lados. Em caso contrário, ele é um polígono **côncavo**.



(e) Polígono convexo



(f) Polígono côncavo

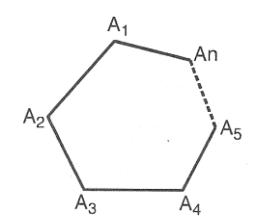
O polígono da figura (e) é convexo. O da figura (f) é côncavo; observe que partes do polígono MNPQR estão contidas em ambos os semiplanos determinados pela reta r, suporte do lado PQ.

POLÍGONOS CONVEXOS

Já vimos a definição de polígono convexo.

A figura mostra um polígono convexo que possui, **n vértices e n lados**.

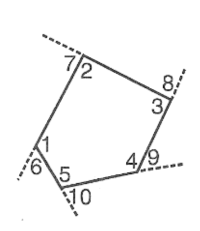
Em função de seu número de lados, um polígono convexo pode receber nomes especiais:



a) 3 lados: triângulo
b) 4 lados: quadrilátero
c) 5 lados: pentágono
d) 6 lados: hexágono
e) 7 lados: heptágono
f) 8 lados: octógono
g) 9 lados: eneágono
h) 10 lados: decágono
i) 11 lados: undecágono
j) 12 lados: dodecágono
l) 15 lados: pentadecágono
m) 20 lados: icoságono

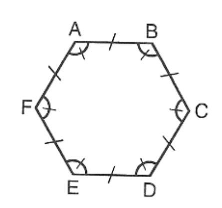
A partir de agora, quando nos referirmos a um polígono convexo, vamos chamá-lo simplesmente “polígono”.

Assim, no pentágono da figura, os ângulos 1, 2, 3, 4 e 5 são os ângulos internos e os ângulos 6, 7, 8, 9 e 10. são os, ângulos externos respectivos.



Convém lembrar que um ângulo interno e seu ângulo externo respectivo são adjacentes e, portanto, suplementares.

Um polígono que tem todos os lados congruentes e todos os ângulos internos congruentes é chamado **polígono regular.**



É claro que o triângulo regular é o triângulo eqüilátero e o quadrilátero regular é o quadrado.

A soma dos lados de um polígono é chamada perímetro do polígono.

Soma dos ângulos internos e externos de um polígono

A **soma dos ângulos internos de um polígono** é função apenas do seu número de lados. Sendo n o número de lados de um polígono, a soma Si de seus ângulos internos é dada por

$$\boxed{S_i = (n-2)\cdot 180°}$$

Cada ângulo externo do polígono é o suplemento do respectivo ângulo interno. Assim, chamando de Se a soma dos ângulos externos de um polígono.

$$\boxed{S_e = 360°}$$

Observe, portanto, que a soma dos ângulos externos de um polígono (um em cada vértice) é constante e igual a 360°, ou seja, independe do número de lados do polígono.

Chamando-se de a_i cada ângulo interno e de a_e cada ângulo externo de um polígono regular.

$$\boxed{a_i = \frac{180°(n-2)}{n}} \qquad \boxed{a_e = \frac{360°}{n}}$$

Exemplos

1) Qual é a soma dos ângulos internos de um pentágono (n = 5) ?

Solução: apenas usando a formula $\boxed{S_i = (n-2)\cdot 180°}$ e já sabendo o numero de lados do poligono em questao, basta substituir.
S = (5 – 2) 180°
S = (3)180°
S = 540°

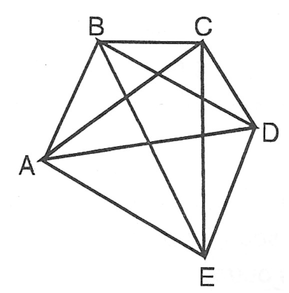
2) Descobrir a categoria dos polígonos cuja soma dos ângulos internos é 1440°.

3) Cada um dos ângulos externos de um octógono regular (n = 8) é dado por ?

Diagonais de um polígono

Cada um dos segmentos que tem como extremos dois vértices não-consecutivos de um polígono é chamado **diagonal do polígono.**

Na figura, os segmentos AC, AD, BD, BE e CE são as diagonais do pentágono ABCDE.



É claro que o número de diagonais de um polígono é função do seu número de lados.

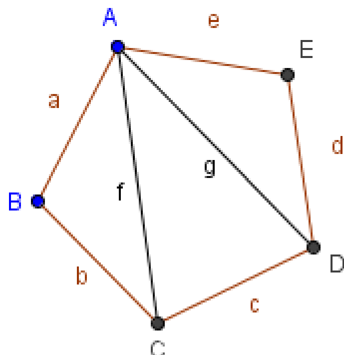
O triângulo não tem diagonais, já que seus três vértices são dois a dois adjacentes.

Exemplos :

1) Qual o número de diagonais de um pentágono (n=5)?

Solução:

O polígono em questão é um pentágono. Logo vamos demonstrar a formula:



Repare que o vértice A não pode formar três diagonais. um com o vértice B, um com vértice E, e um com ele mesmo, assim não podemos utilizar 3 vértices do polígono, como as diagonais são dadas em função do numero de vértices que no caso é o mesmo que o numero de lados, temos no final a formula: D = (N – 3)N , N – 3 é multiplicado por N pelo fato de que todos os vértices devem ser utilizados. Para finalizar a formula devemos dividi-la por 2 pelo fato de que todos os vértices serão contados duas vezes, como o segmento (exemplo AD = DA) logo a formula é:

$$D = \frac{(N-3)N}{2}$$

onde N é o numero de lados ou vértices.

Finalmente resolvendo o exercício temos q N = 5 logo:

D = 5

2) Descobrir a categoria dos polígonos que têm 9 diagonais.

3) Num polígono, o número de diagonais é o triplo do número de lados.Calcular a soma de seus ângulos internos.

4) Qual é o polígono convexo em que a soma das medidas dos ângulos internos é igual à dos externos:

a) triângulo
b) quadrilátero
c) pentágono
d) hexágono

5) Os números de lados de três polígonos convexos são consecutivos. A soma dos ângulos internos desses três polígonos é 2700°. Determine quantos lados tem cada polígono.

a) 6 , 7 e 8
b) 7, 8 e 9
c) 5, 6 e 7
d) 8 , 9 e 10

6) (UFES) Um polígono regular tem por soma dos ângulos internos 2 340º. Quantas diagonais tem esse polígono?

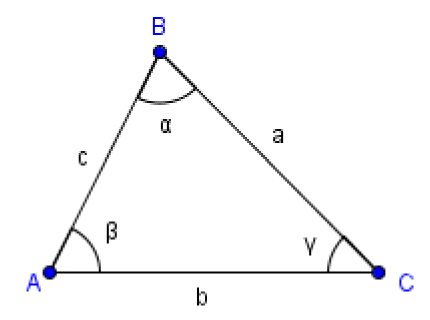
a) 15
b) 90
c) 45
d) 30
e) 20

7) (UFPA) Se a medida de ângulo interno de um polígono regular é 150º, a soma dos ângulos internos desse polígono é:

a) 1 240º
b) 3 240º
c) 3 600º
d) 2 240º
e) 1 800º

TRIÂNGULO

Chama-se **triângulo** todo polígono de três lados. Na figura, temos um triângulo ABC de lados AB, BC e AC e vértices A, B e C e ângulos internos □□□□□□e□□.



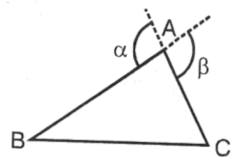
A soma dos lados é o **perímetro** do triângulo e costuma ser representado por 2p.
Portanto:

2p = AB + AC + BC ou 2p = a + b + c

Ângulos internos ou simplesmente ângulos do triângulo são os ângulos convexos.

□□, □ e □□.

Cada ângulo adjacente a um ângulo interno é um **ângulo externo** do triângulo. Em cada vértice há dois ângulos externos opostos pelo vértice e, portanto, congruentes.



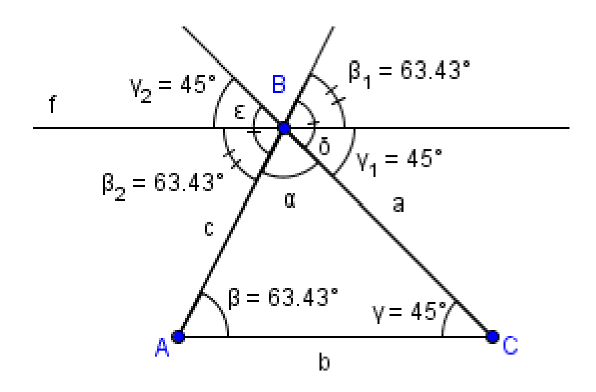
Na figura, destacamos α e β ângulos externos relativos ao ângulo interno A.

É claro que α + A = □□□□□□□□180°□□ isto é, cada ângulo externo de um triangulo é suplemento do ângulo interno a ele adjacente.

ÂNGULOS NO TRIÂNGULO

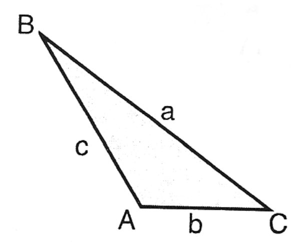
A soma dos ângulos internos de um triângulo é constante é igual a 180°.

Todo ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos dois ângulos internos não-adjacentes.



.Num triângulo ABC,costumamos dizer que os lados AB, AC e BC são opostos, respectivamente, aos vértices ou aos ângulos C, B e A e vice-versa (figura).

É comum representarmos a medida de cada lado pela letra minúscula que corresponde ao seu vértice oposto.



Exemplo:

1) Em um triângulo ABC, sabe-se que A = 3B e que o Ângulo B ultrapassa em 3° o complemento de C. Determinar os três ângulos desse triângulo.

Resolução:

Como A = 3B e o ângulo B = 3 + complemento de C que chamaremos de P
Então B = P + 3° e ainda A + B + C = 180° e C + P = 90° ,fazendo a substituição temos que:
3B + B + 90° - P = 180°,
3B + B + 90 - B - 3° = 180°
3B = 93°
B = 31°

CLASSIFICANDO OS TRIÂNGULOS

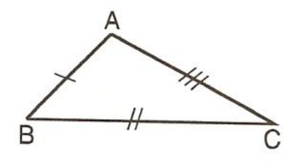
Em função da comparação entre seus lados, um triângulo pode ser chamado de:

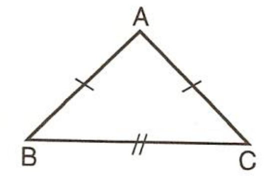
a) **escaleno** se, e somente se, não tem lados congruentes;

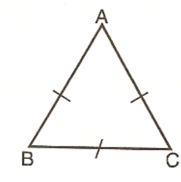
b) **isósceles** se, e somente se, tem dois lados congruentes ;

c) **eqüilátero** se, e somente se, tem os três lados congruentes .

No caso do triângulo isósceles, sendo AB = AC, o terceiro lado BC é chamado **base** e os ângulos B e C são os **ângulos da base.** O ângulo A, oposto à base, é chamado **ângulo no vértice.**







triângulo escaleno triângulo isósceles triângulo eqüilátero

Observe que todo triângulo eqüilátero é isósceles, podendo qualquer de seus lados ser considerado como base.

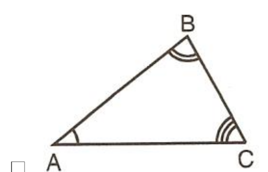
Sendo a soma dos ângulos internos de um triângulo igual a 180°, é claro que um triângulo pode ter no máximo um ângulo reto ou um ângulo obtuso.

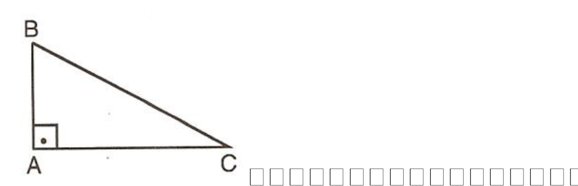
Em função da natureza de seus ângulos, um triângulo pode ser classificado como :

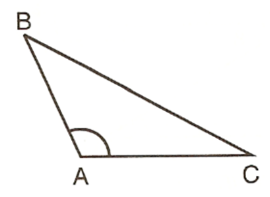
□ **acutângulo,** se, e somente se, tem três ângulos agudos;

□ **retângulo,** se, e somente se, tem um ângulo reto (e conseqüentemente dois ângulos agudos);

□ **obtusângulo,** se, e somente se, tem um ângulo obtuso (e conseqüentemente dois ângulos agudos),
□□







triângulo acutângulo triângulo retângulo triângulo obtusângulo

No triângulo retângulo, sendo A = 90°, é claro que B + C = 90°, ou seja, os ângulos agudos são complementares.

O lado BC do triângulo retângulo, oposto ao ângulo reto, é chamado **hipotenusa;** os outros dois lados são chamados **catetos.**

Para os triângulos retângulos, vale o seguinte caso especial de congruência: se dois triângulos retângulos têm a hipotenusa e um cateto respectivamente congruentes, então eles são congruentes.

A respeito dos triângulos isósceles, podemos destacar alguns fatos importantes:

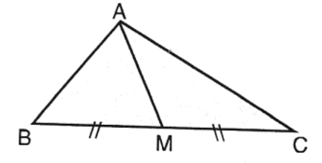
Num triângulo isósceles:
- **os ângulos da base são congruentes;**
- **a mediana relativa à base é também altura e bissetriz interna.**

SEGMENTOS E PONTOS NOTÁVEIS EM UM TRIÂNGULO.

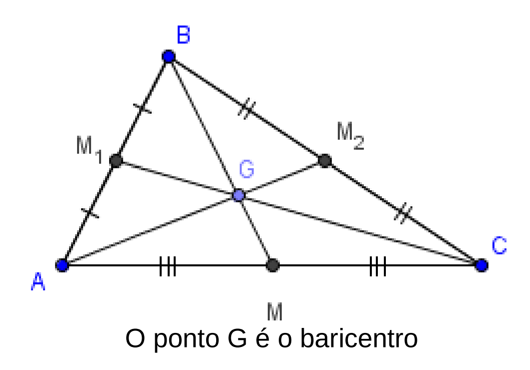
Além dos lados, existem no triângulo outros segmentos de grande importância:
As medianas, as bissetrizes tanto internas quanto externas e as alturas,também temos as mediatrizes que não são segmentos, mais o encontro das três são um ponto notável no triângulo. Estudaremos a seguir esses segmentos e o encontro de cada um originando seus respectivos pontos notáveis.

A mediana:

Chama-se **mediana** de um triângulo qualquer segmento que tem como extremos um vértice e o ponto médio do lado oposto do triângulo. Na figura, o segmento AM é a mediana relativa ao vértice A (ou ao lado BC).



Todo triângulo tem três medianas, cada uma relativa a um vértice (ou a um lado) e o encontro das três medianas recebe o nome de **baricentro** que também é o centro de equilíbrio do triângulo.



O ponto G é o baricentro

Ainda em relação ao baricentro podemos afirmar pelo seguinte teorema que:

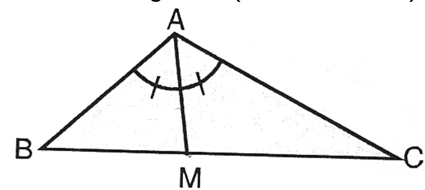
O baricentro de um triângulo dista de cada vértice 2/3 da mediana correspondente.

BG = 2/3 BM

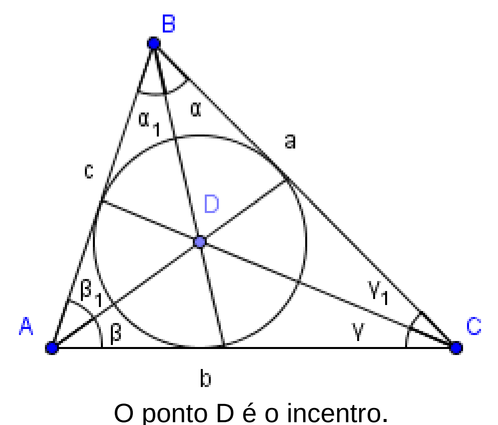
A bissetriz:

Bissetriz interna

Chama-se **bissetriz interna** de um triângulo, qualquer segmento de uma bissetriz de um ângulo interno que tem como extremos o vértice do ângulo e o ponto onde a bissetriz corta o lado oposto. Na figura, o segmento AM é a bissetriz interna relativa ao ângulo A (ou ao lado BC).



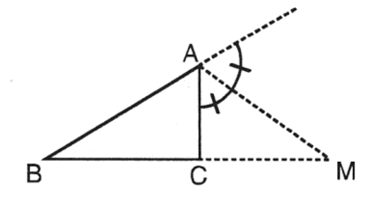
Todo triângulo tem três bissetrizes internas, cada uma relativa a um ângulo (ou a um lado). as três bissetrizes internas concorrem em um mesmo ponto, eqüidistante dos lados e denominado **incentro** do triângulo. Esse nome é dado pelo fato de que o incentro é o centro de uma circunferência inscrita no triângulo. Veja figura.



O ponto D é o incentro.

E ainda o incentro é um ponto equidistante dos lados do triângulo; basta lembrar que cada bissetriz é o lugar geométrico dos pontos do plano eqüidistante dos lados do ângulo. Essa afirmação nos permite calcular a área do triangulo em função do raio da circunferência, caso que veremos em breve em área das figuras planas.

Já a **bissetriz externa**...

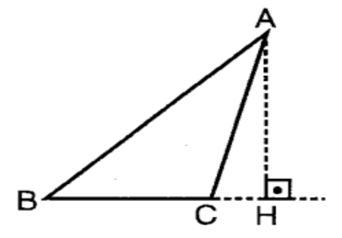


Chama-se **bissetriz externa** de um triângulo qualquer segmento de uma bissetriz de um ângulo externo que tem como extremos o vértice do ângulo e o ponto onde a bissetriz corta o prolongamento do lado oposto.

Na figura, o segmento AM é a bissetriz externa relativa ao ângulo A (ou ao lado BC).

Altura:

Chama-se **altura** de um triângulo qualquer segmento perpendicular a um de seus lados que tem como extremos o vértice oposto a esse lado e o pé da perpendicular sobre o suporte do lado. Todo triângulo tem três alturas, cada uma relativa a um vértice (ou a um lado). As retas suportes das três alturas de um triângulo concorrem em um mesmo ponto, denominado **ortocentro** do triângulo.

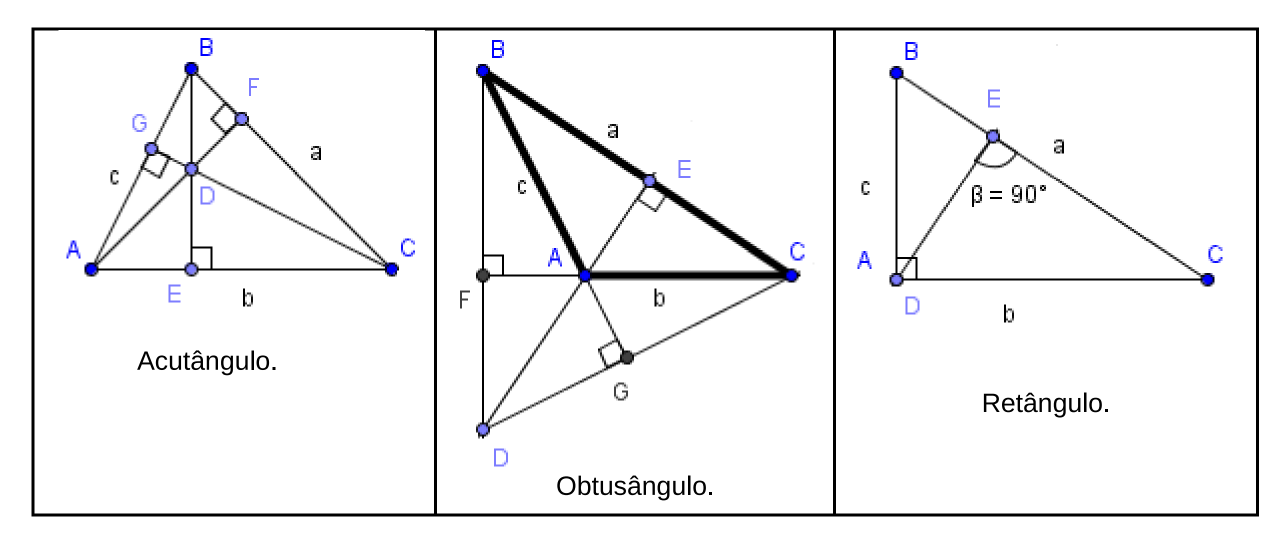


Na figura, o segmento AH é a altura relativa ao vértice A (ou ao lado BC).

Nas figuras a seguir, os segmentos AF, BE e CG são as alturas do triângulo ABC, relativas respectivamente aos lados BC, AC e AB. Elas concorrem no mesmo ponto D, que é o ortocentro do triângulo.

O ortocentro de um triângulo pode ser

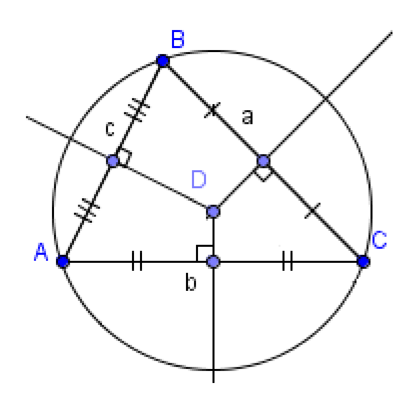
a) interior ao triângulo, se ele é acutângulo;
b) exterior ao triângulo, se ele é obtusângulo;
c) coincidente como vértice do ângulo reto, se ele é retângulo.



Acutângulo. Obtusângulo. Retângulo.

Mediatriz:

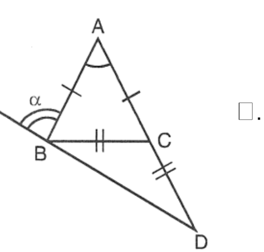
Apesar da mediatriz não ser um segmento notável do triângulo, a interseção das três mediatrizes é um ponto notável, e de muita importância. As mediatrizes dos três lados de um triângulo concorrem em um mesmo ponto, eqüidistante dos vértices e denominado **circum-centro** do triângulo, (veja figura)



O ponto D é o circum-centro.

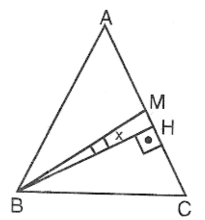
Exemplos:

1) Na figura, AB = AC e BC = CD. Sendo Â = 20°, vamos calcular □.



Resolução: sendo os triângulos ABC e BCD isósceles temos que os ângulos B = C e B' = D logo, B + C + A = 180° como A = 20° temos
2B = 180° - 20°,
B = 80° lembrando que B = C. o ângulo C para o triangulo ABC tem seu suplemento para o triangulo BCD sendo C', logo C + C' = 180° logo, C' = 100° como B' = D, temos B' + D + C' = 180° , 2B' = 80° , B' = 40° com os valores, temos que:
□ + B + B' = 180° assim □□□□60°

2) Seja ABC um triângulo isósceles de vértice A. Se Â = 40°, vamos determinar o ângulo formado pela altura BH e a bissetriz interna BM.



DESIGUALDADES NO TRIÂNGULO

A respeito dos lados e ângulos de um triângulo, podem-se demonstrar certas desigualdades importantes.

Dois lados de um triângulo são desiguais se, e somente se, os ângulos opostos a esses dois lados são desiguais; ao maior lado se opõe o maior ângulo.

$$|b - c| < a < |b + c|$$

$$|a - c| < b < |a + c|$$

$$|a - b| < c < |a + b|$$

Podemos concluir, a partir desse teorema, que a hipotenusa de um triângulo retângulo é maior que qualquer dos catetos.

Cada lado de um triângulo é menor que a soma é maior que a diferença (em módulo) dos outros dois.

Essas relações são conhecidas como **desigualdades triangulares.**

Exemplo:

1) Se dois lados de um triângulo medem 3 cm e 7 cm, qual medida X do terceiro lado ?

2) Podem os três lados de um triângulo medir 6 em, 8 em e 15 cm? Justifique.

3) Se 4, 9 e x são naturais que representam, em metros, as medidas dos lados de um triângulo, determine os possíveis valores de x em cada caso:
a) O triângulo é isósceles.
b) O triângulo é escaleno.

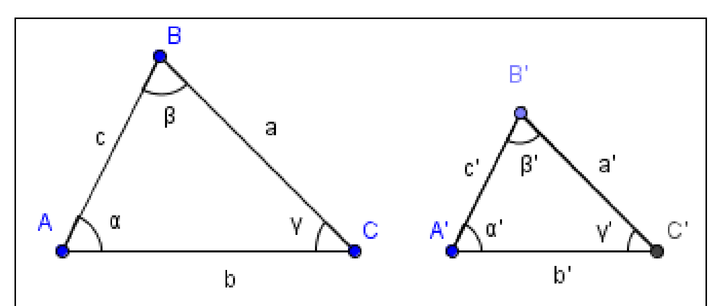
4) Um triângulo escaleno tem 13 cm de perímetro e um de seus lados mede 5 cm. Determine as medidas dos outros dois lados, sabendo que elas são, em cm, números inteiros.

SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados homólogos proporcionais.

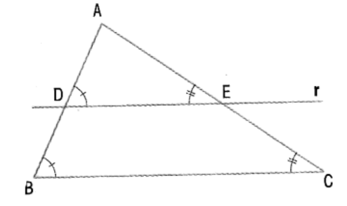
$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} \cong \hat{A}' \\ \hat{B} \cong \hat{B}' \\ \hat{C} \cong \hat{C}' \end{cases}$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k(\text{cosntante de proporcionalidade})$$



TEOREMA FUNDAMENTAL DA SEMELHANÇA

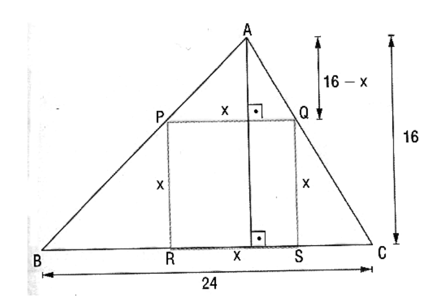
Toda reta paralela a um lado de um triângulo que intersecta os outros dois lados em pontos distintos determina outro triângulo semelhante ao primeiro.



$$\left.\begin{array}{l} r // \overline{BC} \\ r \cap \overline{AB} = \{D\} \\ r \cap \overline{AC} = \{E\} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ADE \sim \Delta ABC$$

Exemplos:

1) A figura mostra um quadrado PQRS inscrito num triângulo ABC. Sendo BC = 24 cm e a altura relativa a essa base igual a 16 cm, vamos calcular a medida do lado desse quadrado.



2) Uma reta paralela ao lado BC de um triângulo determina sobre o lado AB segmentos de 2 cm e 8 cm. Calcular os segmentos que esta reta determina sobre o lado AC = 15 cm.

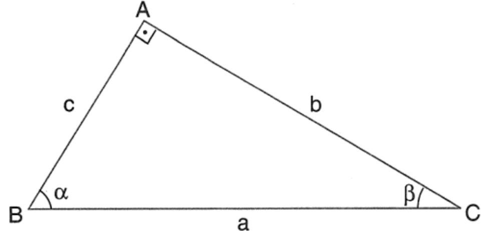
3) Dois triângulos T e T' são semelhantes. Os lados do triângulo T medem 18 cm, 22 cm e 30 cm. Achar os lados do triângulo T' sabendo-se que tem 175 cm de perímetro.

4) As bases de um trapézio medem 8 dm e 12 dm. Os lados não paralelos medem 3 dm e 5 dm. Prolongam-se os lados não paralelos até se encontrarem. Calcular os dois lados dos incógnitos do menor triângulo assim obtido.

5) As bases de um trapézio medem 12 m e 16 m e altura 9 m. Achar as distâncias do ponto de interseção das diagonais às bases do trapézio.

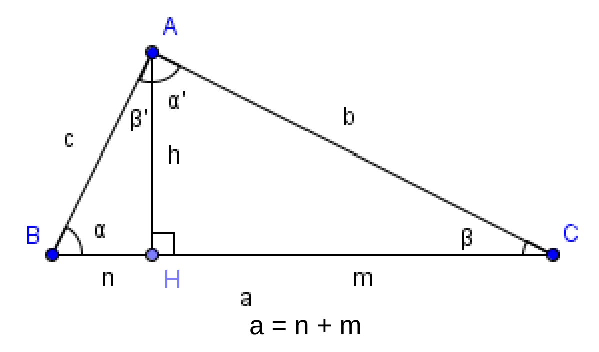
RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Todo triângulo retângulo possui dois ângulos agudos complementares e um ângulo reto, ao qual se opõe o seu maior lado, chamado hipotenusa os outros dois lados são denominados catetos.

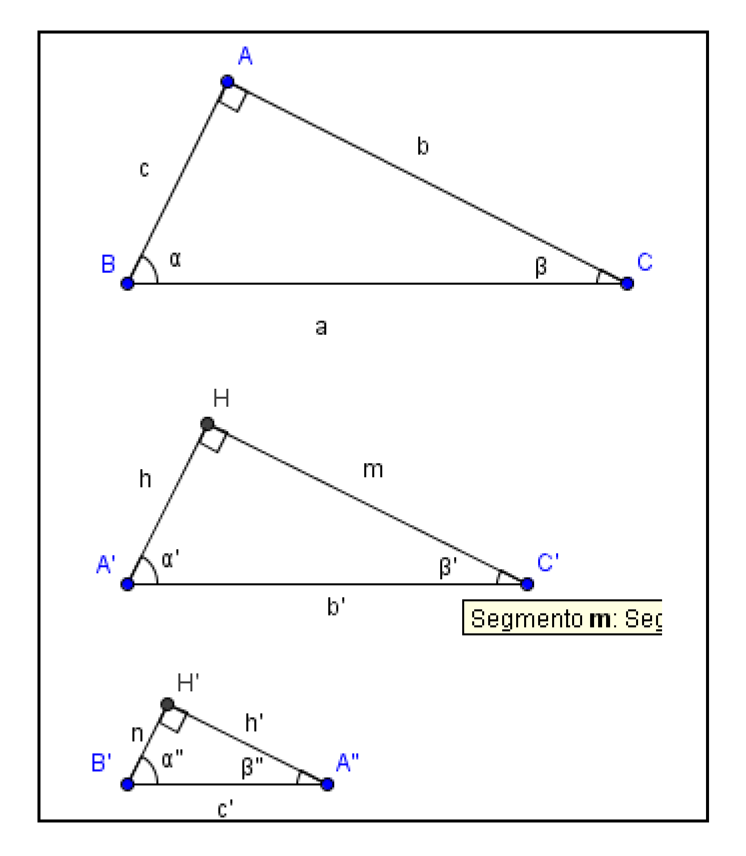


a: hipotenusa
b, c : catetos

A perpendicular a $\overline{BC}$, traçada por A, é a altura h, relativa à hipotenusa do triângulo. BH = n e CH = m são as projeções dos catetos sobre a hipotenusa.



Observando as medidas dos ângulos, concluímos que os três triângulos formados são semelhantes.



$$\Delta ABC \sim \Delta HAC \sim \Delta HBA$$

Considerando a semelhança entre os dois primeiros triângulos:

$$\frac{c}{h} = \frac{b}{m} = \frac{a}{b'} \quad \begin{cases} cm = bh \\ b^2 = ma \\ cb' = ah \end{cases}$$

Pela semelhança entre o primeiro e o terceiro triângulo:

$$\frac{c}{n} = \frac{b}{h'} = \frac{a}{c'} \quad \begin{cases} ch' = nb \\ bc' = h'a \\ c^2 = na \end{cases}$$

Considerando agora a semelhança entre os dois últimos triângulos, podemos escrever:

$$\frac{h'}{n}=\frac{m}{h}=\frac{b'}{c'} \quad \begin{cases} h^2 = mn \\ mc' = b'h \\ h'c' = b'n \end{cases}$$

Assim, podemos afirmar que em todo triângulo retângulo:

(I) O quadrado de cada cateto vale o produto da sua projeção sobre a hipotenusa pela hipotenusa.
(II) O produto da hipotenusa pela altura relativa a ela vale o produto dos catetos.
(III) O quadrado da altura relativa à hipotenusa vale o produto entre as projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

Lembrando que a = m + n e considerando ainda as relações (I), temos:

$$\frac{\left.\begin{array}{l} am=b^2 \\ an=c^2 \end{array}\right\}+}{am+an=b^2+c^2} \Rightarrow a(m+n)=b^2+c^2 \Rightarrow \ a^2=b^2+c^2$$

Esta última – é muito importante – relação é conhecida como teorema de Pitágoras e é assim interpretada:

Em todo triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

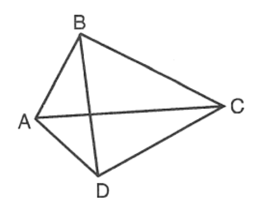
Exemplos:

1) Considerando que os catetos AB e AC medem, respectivamente, 3 cm e 4 cm, determinar a medida da altura relativa à hipotenusa.

2) Sejam 2cm e 3 cm as medidas das projeções dos catetos de um triângulo retângulo sobre a hipotenusa. Calcular as medidas dos catetos.

QUADRILÁTEROS CONVEXOS

Quadrilátero convexo é todo polígono convexo de quatro lados.
Todo quadrilátero tem **2** diagonais.

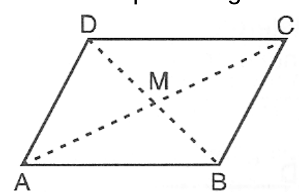


Na figura, vemos o quadrilátero ABCD, de diagonais AC e BD.
A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é **360°**.

Alguns quadriláteros, por possuírem propriedades muito específicas, recebem denominações especiais.

PARALELOGRAMO

Chama-se paralelogramo todo quadrilátero cujos lados são dois a dois paralelos.



$$\left.\begin{array}{l} AD // BC \\ AB // DC \end{array}\right\} \Leftrightarrow ABCD \text{ e paralelogramo}$$

Os paralelogramos possuem as seguintes propriedades

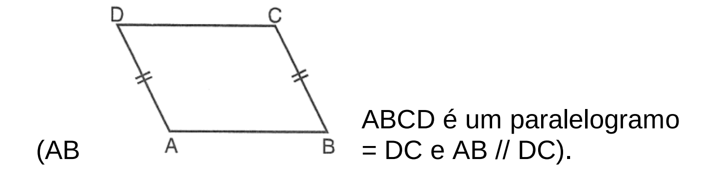
1) Os lados opostos são congruentes: AB = DC e AD = BC.

2) Os ângulos opostos são congruentes:

3) Os ângulos não-opostos são suplementares:

4) As diagonais se cortam ao meio: AM = MC e BM = MD.

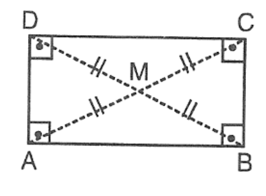
Se um quadrilátero tem dois lados opostos paralelos e congruentes, então ele é um paralelogramo.



ABCD é um paralelogramo (AB = DC e AB // DC).

RETÂNGULO

Chama-se **retângulo** todo paralelogramo que tem os quatro ângulos congruentes (figura)



É claro que, sendo A + B + C + D = 360°, teremos, necessariamente, para o retângulo:

$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90°$$

Em outras palavras, retângulo é todo paralelogramo que tem os quatro ângulos retos.
Além de o retângulo ter as propriedades dos paralelogramos, pode-se provar que

As diagonais de um retângulo são congruentes : AC = BD
Como as diagonais de um paralelogramo se cortam ao meio, podemos concluir, ainda observando a figura, que AM = MC = MB = MD.
A partir daí, podemos enunciar o seguinte teorema:

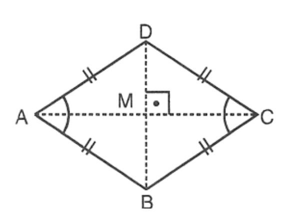
Num triângulo retângulo, a mediana relativa à hipotenusa é a metade da hipotenusa.

De fato, na figura, ABD é um triângulo retângulo de hipotenusa BD e AM é a mediana relativa à hipotenusa. É claro que, sendo AM = MD = MB.

$$AM = \frac{BD}{2}$$

LOSANGO

Chama-se losango todo paralelogramo que tem os quatro lados congruentes.

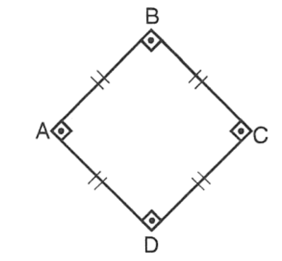


Na figura, o paralelogramo ABCD é um losango, pois AB = BC = CD = DA.

Além de o losango ter as propriedades dos paralelogramos, vamos provar o teorema:

As diagonais de um losango são perpendiculares e são bissetrizes dos ângulos internos.

QUADRADO



Chama-se quadrado todo paralelogramo que tem os quatro ângulos congruentes (retos) e os quatro lados congruentes.

$$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = \widehat{D} = 90°$$

AB = BC = CD = DA, donde ABCD é um quadrado.

Um quadrado é, ao mesmo tempo, retângulo e losango. Valem, portanto, para o quadrado, todas as propriedades vistas para o paralelogramo, o retângulo e o losango.

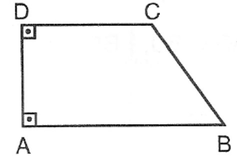
É claro que o único tipo de quadrilátero regular é o quadrado.

TRAPÉZIOS

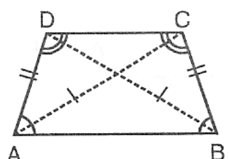
Chama-se **trapézio** todo quadrilátero que tem dois lados opostos paralelos e os outros dois lados não--paralelos.
Os lados paralelos são as **bases** e a distância entre eles é a altura do trapézio.

Na figura, sendo AB // CD e AD não-paralelo a BC, o quadrilátero ABCD é um trapézio de bases AB e CD e altura CH.

Se um dos ângulos de um trapézio é reto, ele é chamado **trapézio retângulo** (figura); neste caso, haverá necessariamente um outro ângulo reto no trapézio e o lado adjacente aos dois ângulos retos (AD, no caso) é altura do trapézio.



trapézio retângulo



trapézio isósceles

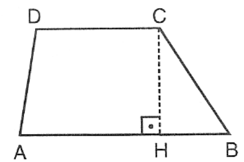
Se os lados não-paralelos de um trapézio são congruentes, ele é chamado **trapézio isósceles**; é o caso do trapézio da figura, em que AD = BC.

Propriedades dos trapézios isósceles:

a) as diagonais são congruentes (AC = BD);

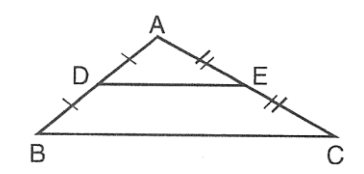
***b)* os ângulos de uma mesma base são congruentes (A = B e C = D).**

Um trapézio não-isósceles pode ser chamado **trapézio escaleno**.



BASES MÉDIAS

Chama-se **base média de um triângulo** todo segmento cujos extremos são os pontos médios de dois de seus lados.

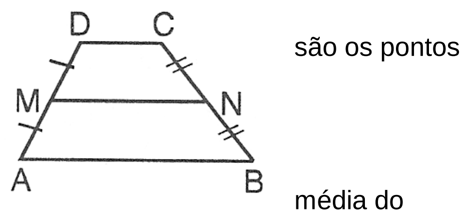


Na figura, sendo AD = BD e AE = CE, o segmento DE é base média do triângulo ABC, relativa à base BC.

Toda base média de um triângulo é paralela à respectiva base e é a metade dessa base.

$$DE//BC \text{ e } DE = \frac{BC}{2}$$

Chama-se **base média de um trapézio** o segmento cujos extremos são os pontos médios dos lados não-paralelos do trapézio.



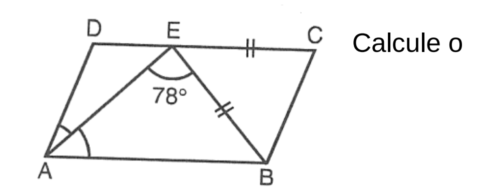
Na figura, sendo AM = MO e BN = NC, o segmento MN é a base média do trapézio ABCD. A respeito da base média de um trapézio, pode-se provar o seguinte teorema:

A base média de um trapézio é paralela às bases e é a média aritmética das bases.

$$MN//AB \text{ e } MN = \frac{AB+CD}{2}$$

Exemplo:

1. Na figura ABCD é um paralelogramo, AE é bissetriz de Â e EB = EC. Calcule o ângulo C.



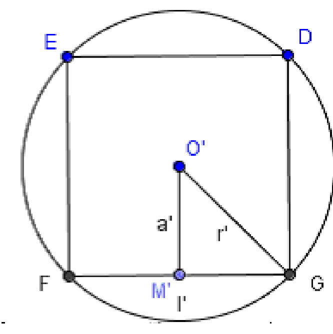
POLÍGONOS REGULARES INSCRITOS NA CIRCUNFERÊNCIA

Introdução

Nas figuras abaixo há dois polígonos regulares (todos os lados e todos os ângulos congruentes entre si) inscritos, cada um, num circunferência.

Cálculo da medida do lado e do apótema de um polígono regular em função do raio da circunferência

Quadrado inscrito em uma circunferência



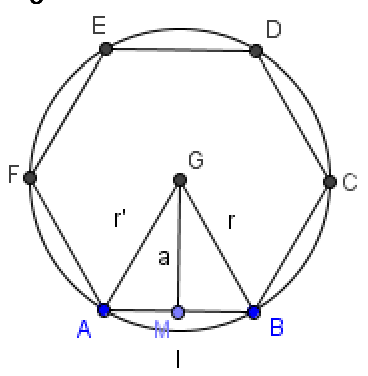
a) Lado $l_4 = r\sqrt{2}$

b) Apótema $a_4 = \frac{r\sqrt{2}}{2}$

Exemplo:

1) Calcular o lado e o apótema de um quadrado inscrito numa circunferência de 30 cm de raio.

Hexágono regular inscrito em uma circunferência



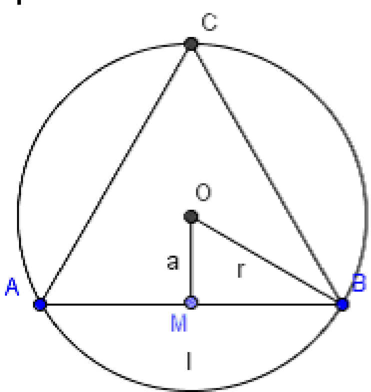
a) Lado $l_6 = r$

b) Apótema $a_6 = \frac{r\sqrt{3}}{2}$

Exemplo:

2) Calcular o lado do apótema de um hexágono regular inscrito numa circunferência

Triângulo eqüilátero inscrito em uma circunferência



a) Lado $l_3 = r\sqrt{3}$

b) Apótema $a_3 = \frac{r}{2}$

Exemplo:

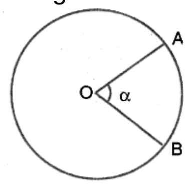
3) Calcular o lado e o apótema de um triângulo eqüilátero inscrito numa circunferência de 35 cm de lado.

Circunferência e círculo

Ângulos na circunferência

Ângulo central

Ângulo central é o ângulo que tem o vértice no centro da circunferência. A medida de um ângulo central é igual à medida do arco correspondente

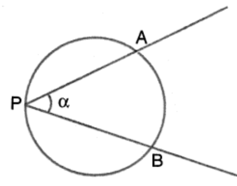


α = AB = AÔB

obs : tome cuidado pois não confunda comprimento de arco, com ângulo do arco, pois comprimento é dado pelo ângulo multiplicado pelo raio da circunferência!!!

Ângulo inscrito

Ângulo inscrito é o ângulo cujo vértice é um ponto da circunferência e os lados são secantes à circunferência. A medida de um ângulo inscrito é a metade da medida do arco correspondente.

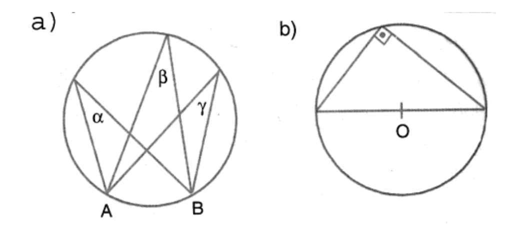


Observações

a) Os ângulos inscritos num mesmo arco são congruentes.

b) Todo ângulo inscrito numa semi-circunferência é reto.

Exemplos

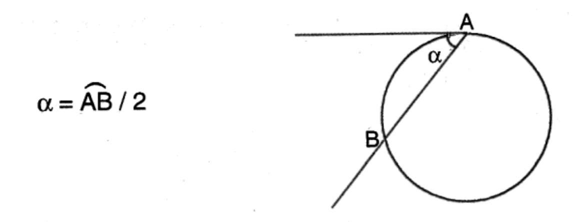


a) α, β e γ são congruentes pois estão inscritos no mesmo arco AB.

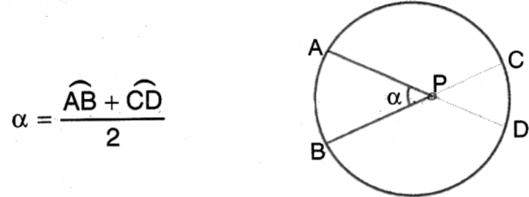
b) independentemente do ponto em q se encontre A na circunferencia o ângulo formado por esse vértice sempre será um ângulo reto.(desde que o lado oposto ao ângulo passe pelo centro dessa circunferência!

Ângulo semi-inscrito (ou ângulo de segmento)

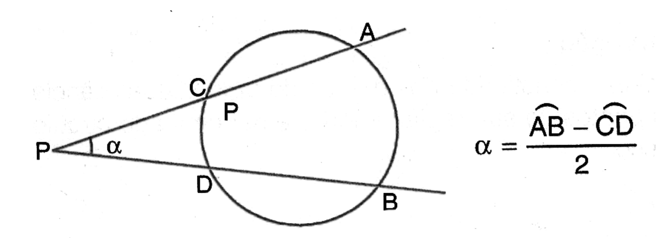
Ângulo semi-inscrito é um ângulo que tem o vértice na circunferência, um lado secante e o outro tangente à circunferência. A medida do ângulo semi-inscrito é a metade da medida do arco correspondente.



Ângulo de vértice interior

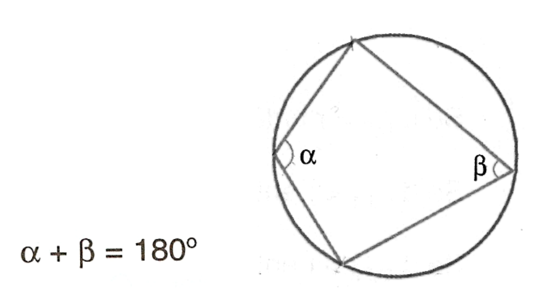


Ângulo de vértice exterior



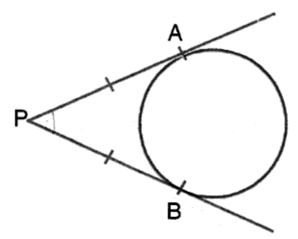
Quadrilátero inscrito

Em todo quadrilátero inscritível, os ângulos opostos são suplementares.



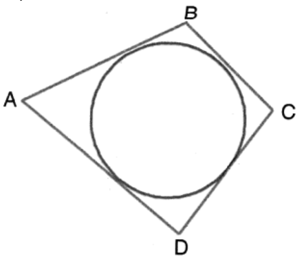
Segmentos tangentes

Se de um ponto P traçarmos duas tangentes a Uma circunferência, sendo A e B os pontos de tangência, então PA = PB.



Quadrilátero circunscrito

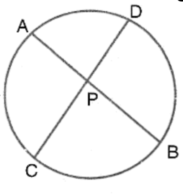
Em todo quadrilátero circunscritível, a soma de dois lados opostos é igual à soma dos outros dois.



AB + CD = BC + AD

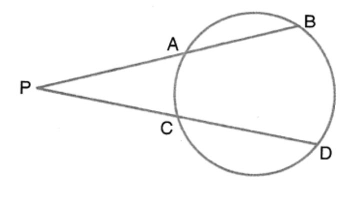
RELAÇÕES MÉTRICAS NA CIRCUNFERÊNCIA

1) Se duas cordas AB e CD de um circunferência se cortam num ponto P, então o produto dos segmentos PA e PB da primeira corda é igual ao produto dos segmentos PC e PD da segunda corda.



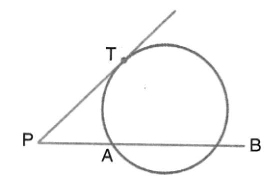
PA . PB = PC . PD

2) Se os prolongamentos de duas cordas AB e CD se cortam em um ponto P exterior a uma circunferência, o produto dos segmentos PA e PB é igual ao produto dos segmentos PC e PD.



PA . PB = PC . PD

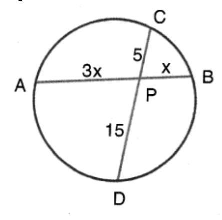
3) Se uma secante AB e uma tangente a uma circunferência num ponto T se cortam externamente num ponto P, a medida do segmento PT é igual à média geométrica dos segmentos PA e PB.



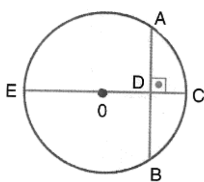
$PT^2 = PA \cdot PB$

Exemplos:

1) Calcule o valor de x na figura abaixo:

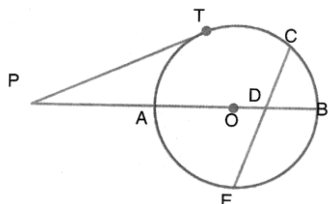


2) Na figura, AB é perpendicular ao diâmetro EC do círculo de centro O, CD = 4 cm e ED = 9 cm. A medida da corda AB, em cm, é



a) 8
b) 10
c) 12
$d) 2\sqrt{13}$
$e) 2\sqrt{17}$

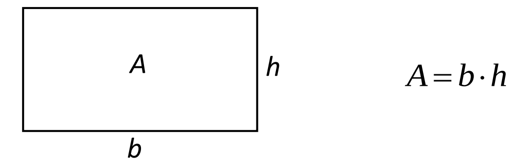
3) Na figura abaixo, onde T é o ponto de tangência e O é o centro da circunferência , determine o valor de DE.
Dados: PT = 16, PA = CD = 8, BD = 4



ÁREA DAS FIGURAS PLANAS

A) RETÂNGULO

A área A de um retângulo é o produto da medida da base pela medida da altura.



$$A = b \cdot h$$

B) QUADRADO

O quadrado é um retângulo; logo, sua área A é o produto da medida da base pela medida da altura.

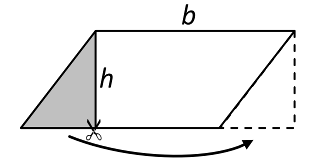
A a

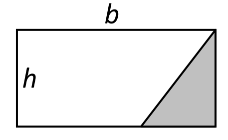
a

$$A = a^2$$

C) PARALELOGRAMO

A área do paralelogramo de base b e altura h é igual à área de um retângulo de base b e altura h. Observe a figura:



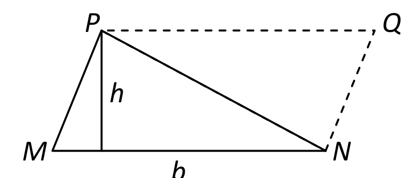


$$A = b \cdot h$$

O triângulo sombreado no paralelogramo é congruente ao triângulo pontilhado; assim, se o colocarmos no lugar pontilhado, obteremos um retângulo de base b e altura h. Logo a área A do paralelogramo é o produto da medida da base pela medida da altura.

D) TRIÂNGULO

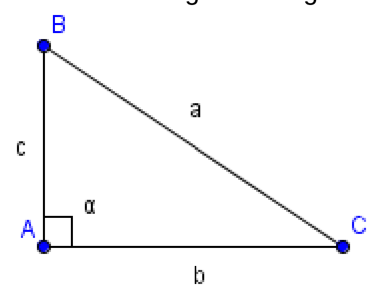
Consideremos o triângulo MNP cuja base $\overline{MN}$ mede b e a altura relativa a essa base mede h. Traçando por P uma reta paralela à base e por N uma reta paralela ao lado $\overline{MP}$, obtemos o paralelogramo MNQP. A área do triângulo MNP é a metade da área do paralelogramo, ou seja, a área do triângulo é a metade do produto da medida da base pela medida da altura.



$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

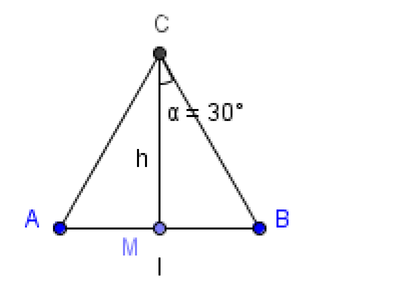
Ø CASOS PARTICULARES:

TRIÂNGULO RETÂNGULO: a área do triângulo retângulo vale metade do produto dos catetos.



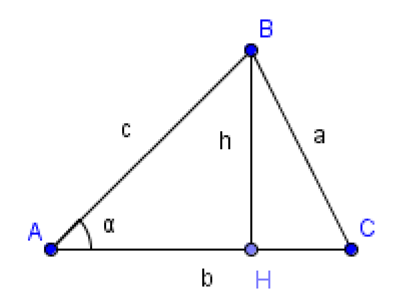
$$A = \frac{b \cdot c}{2}$$

TRIÂNGULO EQÜILÁTERO:



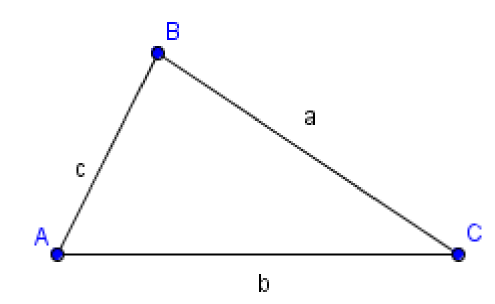
$$A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

ÁREA DO TRIÂNGULO EM FUNÇÃO DE DOIS LADOS E DO ÂNGULO COMPREENDIDO ENTRE ELES (FÓRMULA TRIGONOMÉTRICA DA ÁREA):



$$A = \frac{a \cdot b \cdot sen\alpha}{2}$$

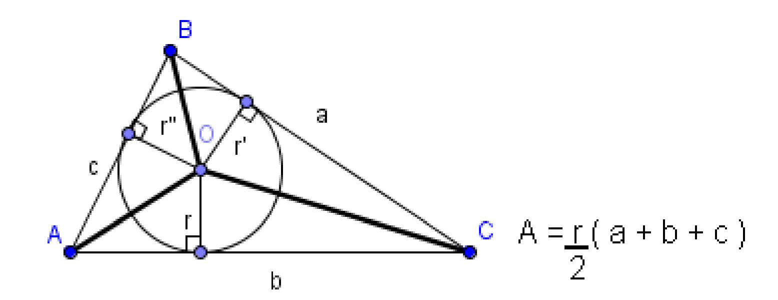
ÁREA DO TRIÂNGULO EM FUNÇÃO DOS TRÊS LADOS (FÓRMULA DE HERON)



$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

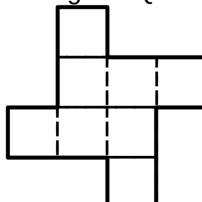
$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

AREA DO TRIÃNGULO EM FUNÇÂO DO RAIO DA CIRCUNFERENCIA INSCRITA (BISSETRIZ E INCENTRO)



EXEMPLOS:

1) (UFRN) Um terreno de 72 m^2 de área é formado por 8 quadrados congruentes, conforme mostra a figura. Quanto mede a cerca que delimita o terreno?



---

2) (Unicamp-SP) Um fio de 48 cm de comprimento é cortado em duas partes, para formar dois quadrados, de modo que a área de um deles seja quatro vezes a área do outro

a) Qual deve ser o comprimento de cada uma das partes do fio?
b) Qual será a área de cada um dos quadrados formados?

---

3) Determine a área de um quadrado inscrito:
   a) em uma circunferência de raio 2 cm;
   b) em uma semi-circunferência de raio 2 cm.

---

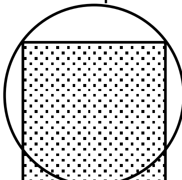
4) Se aumentarmos em 20% o lado de um quadrado, sua área aumentará 20 cm^2. Determine o lado do quadrado original.

---

5) Uma parede retangular de 4,5 m de comprimento por 3 m de altura deve ser completamente revestida com azulejos quadrados de lado 15 cm. Quantos azulejos serão necessários?

---

6) (UFPR) Uma circunferência de raio 5 cm tangencia um lado de um quadrado e passa pelos vértices que não pertencem a esse lado, conforme a figura. Calcule a área desse quadrado.

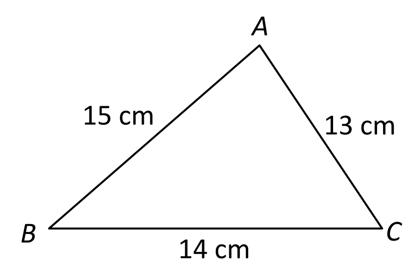


---

7) Em um triângulo retângulo, um dos catetos mede 11 cm e a hipotenusa tem medida excedendo 4 cm a medida do outro cateto. Determine a área do triângulo.

---

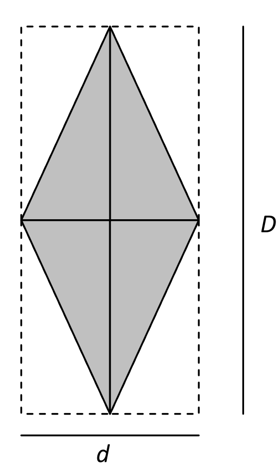
8) Considere o triângulo *ABC*:



a) Determine a medida *h* da altura $\overline{AH}$.
b) Calcule a área desse triângulo.
c) O sábio grego Heron, que viveu em Alexandria no século I d.C., provou que a área *A* de um triângulo cujos lados medem *a*, *b* e *c* é dada por $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ em que *p* é o semi-perímetro, isto é, $p = \frac{a+b+c}{2}$. Usando a fórmula de Heron, calcule a área do triângulo *ABC*.

E) LOSANGO

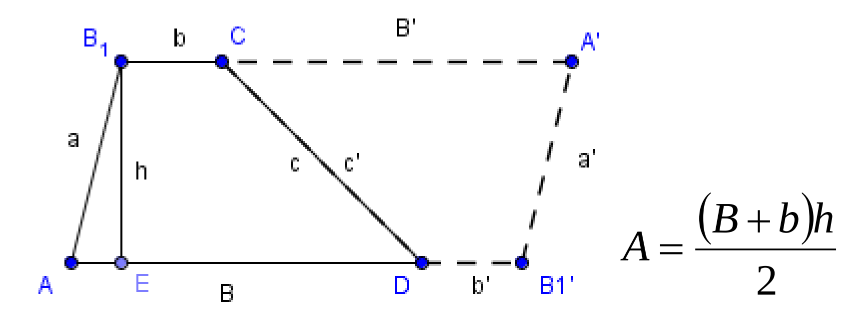
Construindo um retângulo de dimensões D e d, obtemos oito triângulos retângulos congruentes. A área ocupada pelo losango vale a metade da área ocupada pelo retângulo. Portanto, a área do losango é igual à metade do produto das medidas das diagonais.



$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

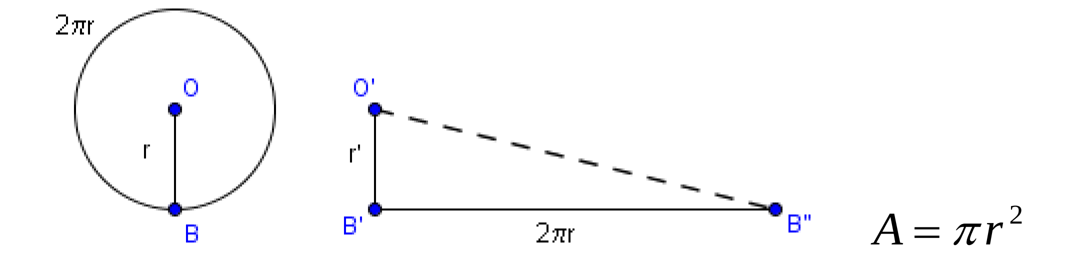
F) TRAPÉZIO

Traçando a diagonal QN, dividimos o trapézio em dois triângulos de altura *h* em relação às bases *b* e *B*. A área do trapézio será igual à soma das áreas dos triângulos *MNQ* e *NPQ*.

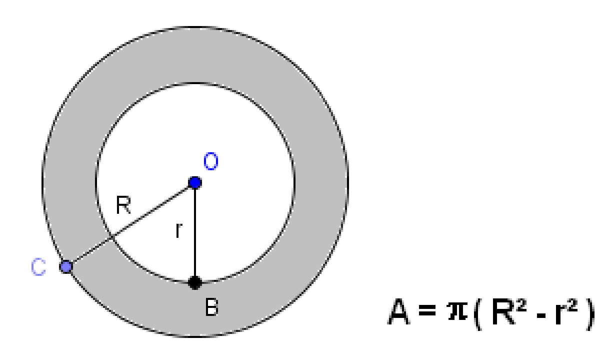


G) CÍRCULO

O perímetro do círculo é 2πr. basta multiplicar o raio do círculo pelo ângulo dado por uma volta completa em radianos no caso 2π.



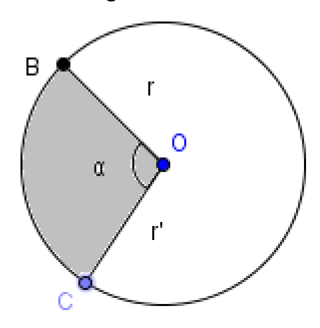
Coroa circular:



Setor circular:

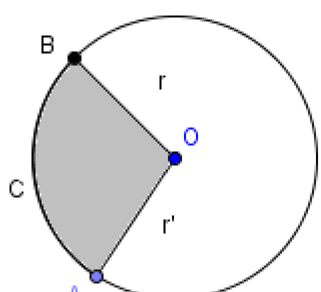
Em cada círculo, a região limitada pelos lados de um ângulo central é chamada de setor circular.

Área do setor circular em função do raio r e do ângulo α.



α em graus: 360º → πr^2 αº → A Resolvendo a regra de três temos: $A = \dfrac{\pi r^2 \alpha}{360°}$	□□em radianos: 2□□ → □r² □□□□□→ A resolvendo a regra de três temos: $A = \dfrac{r^2 \alpha}{2}$

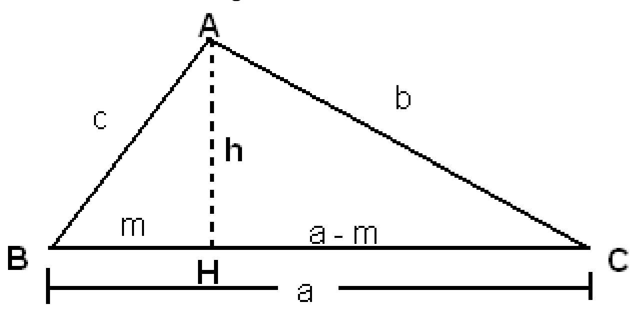
Área do setor circular em função do raio r e do comprimento do arco c.



resolvendo uma simples regra de três, com o comprimento total da circunferência 2□r estando para o comprimento C do arco e a área total da circunferência □r² estando para a área do setor circular em cinza, temos:

2□r → C
□r² → A. logo : **A = Cr / 2**

Extras:
Demonstração da formula de heron:
Considere um triangulo ABC:



aplicando o teorema de pitágoras aos triângulos AHB e AHC, respectivamente , obtemos:
$c^2 = h^2 + m^2$ e $b^2 = h^2 + (a – m)^2$ donde $m = a^2 + c^2 - b^2 / 2^a$
Em $h^2 = c^2 - m^2$, substituindo o valor de m obtido anteriormente, vem:
$h^2 = c^2 - (a^2 + c^2 - b^2 / 2a)$
fatorando esta ultima expressão , podemos escrever:
$h^2 = (a + c + b)(a + c – b)(b + a – c)(b – a + c) / 4a^2$
denotando por $2p = a + b + c$ o perimetro do triangulo ABC, o semiperimetro do referido triangulo é dado por
$p = (a + b + c) / 2$
e daí ,
$a + c – b = a + b + c – 2b = 2p – 2b = 2(p – b)$
analogamente,
$b + a – c = 2(p – c)$
$b – a + c = 2(p – a)$
substituindo esses valores na ultima expressão de h^2, vem:
$h^2 = 2p\ 2(p – b)\ 2(p – c)\ 2(p – a) / 4a^2$
donde:

$$h = a/2\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

designando por S a área do triangulo ABC teremos:

$$S = \frac{ah}{2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{a} \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

finalmente temos: $S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$
fonte: guia do tutor 2, projeto entre jovens, caed.

Sessão Leitura

Área da superfície corporal



Você sabia que os dermatologistas definiram uma fórmula para calcular, aproximadamente, a área da superfície corporal de uma pessoa? A área (em m^2) é calculada em função da massa (m) do indivíduo:

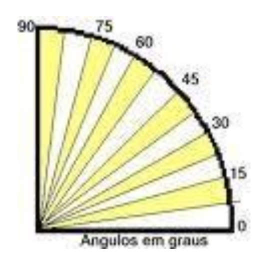
$$A = 0{,}11.m^{\frac{2}{3}}$$

Por exemplo, uma pessoa com massa igual a 70kg possui a área da superfície corporal aproximadamente igual a:

$$A = 0{,}11.\sqrt[3]{70^2}\,m^2$$

O valor resultante é útil para determinar a quantidade de calor perdida através do suor.

A Origem do Grau



Em qualquer livro de matemática encontramos afirmações de que o ângulo reto mede 90º e que o ângulo raso mede 180º. Mas qual é a razão para os valores serem justamente 90 e 180.

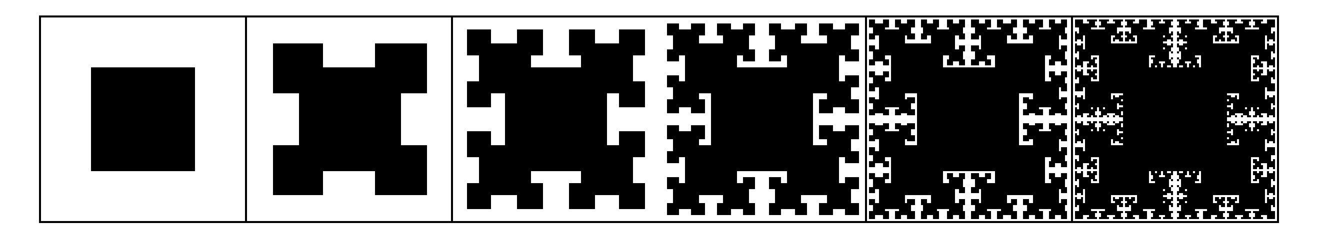
Para entendermos isso, retornaremos ao ano de 4000 a.C., quando egípcios e árabes estavam tentando elaborar um calendário. Nessa época, acreditava-se que o Sol girava em torno da Terra numa órbita que levava 360 dias para completar uma volta. Desse modo, a cada dia o Sol percorria uma parcela dessa órbita, ou seja, um arco de circunferência de sua órbita. A esse arco fez-se corresponder um ângulo cujo vértice era o centro da Terra e cujos lados passavam pelas extremidades de tal arco. Assim, esse ângulo passou a ser uma unidade de medida e foi chamado de*grau* ou ângulo de um grau.

Pode-se concluir, então, que para os antigos egípcios e árabes o grau era a medida do arco que o Sol percorria em torno da Terra durante um dia.

Hoje, sabemos que é a Terra que gira em torno do Sol, mas, contudo, manteve-se a tradição e convencionou-se dizer que o arco de circunferência mede um grau quando corresponde a 1/360 dessa circunferência.

O que são os fractais?

Não é fácil entender nem definir essas formas, que mais parecem pinturas psicodélicas e são fruto de uma verdadeira revolução em dois ramos da matemática: a geometria e a estatística. Desde o século IV a.C. até poucas décadas atrás, o estudo das figuras geométricas se baseava em formas puras como os círculos, os quadrados e os triângulos, que aprendemos ainda no primário. É a chamada geometria euclidiana, que deve seu nome ao matemático egípcio Euclides. Formas exatas e perfeitas como essas são abstrações impossíveis de serem encontradas na natureza. E é justamente na natureza que estava oculta a geometria fractal, descoberta entre as décadas de 60 e 70 tanto nos estudos das variações climáticas pelo meteorologista americano Edward Lorenz quanto nas estatísticas visualizadas em computador pelo matemático polonês Benoit Mandelbrot, o homem que deu nome às fractais.



O que elas mostravam é que processos aparentemente irregulares como a ramificação de uma árvore ou o recorte geográfico de um litoral seguem, na verdade, um padrão - que, por sua vez, obedece a uma fórmula matemática. Aí está a característica principal da geometria fractal, batizada de autosimilaridade: são formas cujas partes sempre reproduzem o todo. "Não existe uma definição precisa, mas podemos dizer que uma figura é um fractal quando ela é formada por diversas partes, que lembram, cada uma, o desenho da figura inteira", diz o matemático americano Michael Frame, da Universidade Yale, nos Estados Unidos, co-autor, junto com Mandelbrot, do livro Chaos Under Control: The Art and Science of Complexity ("Caos sob controle: a arte e a ciência da complexidade"), que explora esse tema.

"Os estudos iniciais sobre Geometria Plana estão relacionados à Grécia Antiga, também pode ser denominada Geometria Euclidiana em homenagem a Euclides de Alexandria (360 a.C. - 295 a.C.), grande matemático educado na cidade de Atenas e frequentador da escola fundamentada nos princípios de Platão.

Os princípios que levaram à elaboração da Geometria Euclidiana eram baseados nos estudos do ponto, da reta e do plano. O ponto era considerado um elemento que não tinha definição plausível, a reta era definida como uma sequência infinita de pontos e o plano definido através da disposição de retas.

As definições teóricas da Geometria de Euclides estão baseadas em axiomas, postulados, definições e teoremas que estruturam a construção de variadas formas planas. Os polígonos são representações planas que possuem definições, propriedades e elementos."

Texto retirado do site -http://www.brasilescola.com/matematica/geometria-plana.htm"

FIXAÇÃO

01. Simplifique as medidas:

a) 30º 70'
b) 45º 150'
c) 110º 58' 300"

02. Determine as somas e diferenças:

a) 10º 30' 45" + 15º 29' 20"
b) 20º 50' 45" - 5º 45' 30"
c) 31º 40' - 20º 45'
d) 90º - 50º 30' 45"

03. Determine os produtos e as divisões:

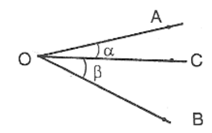
a) 5 x (6º 15' 30")
b) (46º 48' 54") : 2
c) (52º 63' 42") : 5

04. Dois segmentos AB e BC são adjacentes, sendo M o ponto médio de AB e N o ponto médio de BC. Se AB = 4 cm e CM = 12 cm, determine a medida de CN.

05. As bissetrizes de dois ângulos consecutivos formam um ângulo de 38°. Calcule a soma dos dois ângulos.

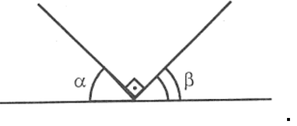
06. Determine a medida em graus do ângulo formado pelas bissetrizes de dois ângulos adjacentes.

07. Na figura OC é bissetriz do ângulo AOB. Se = 5x - 13° e = 2x + 8°, calcule, em graus, a medida do ângulo AOB.



08. Considere os ângulos de medidas α = 67°, β = 46° 28', e $\gamma = 34°46'40''$. Calcule:

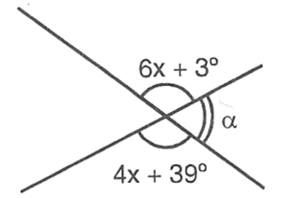
$a) \alpha + \beta + \gamma$
$b) \alpha - \gamma$
$c) 3\beta - \gamma$
$d) \frac{\beta}{3} - \frac{\gamma}{4}$

09. Na figura $\alpha = 3a + 5°$ e $\beta = a - 13°$. Calcule a .

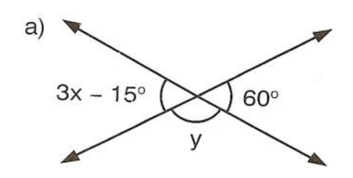
10. Encontre o complemento e o suplemento do ângulo $\alpha = 37°21'39''$

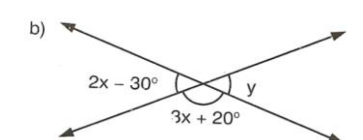
11. Dois ângulos são complementares e o suplemento do maior deles é 7 vezes o menor. Calcule esses ângulos.

12. Determine, em graus, a medida do ângulo da figura:

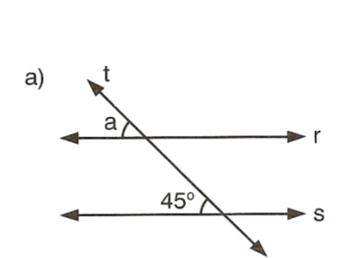


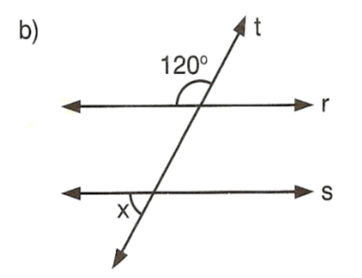
13) Calcule x e y :

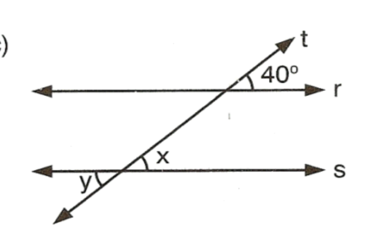




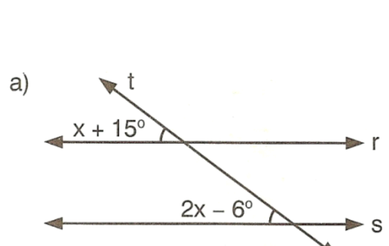
14) Se r //s, determine os ângulos indicados pelas letras:

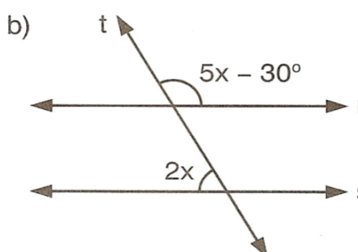


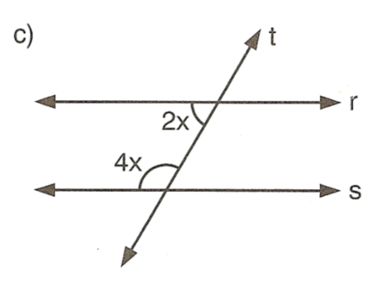




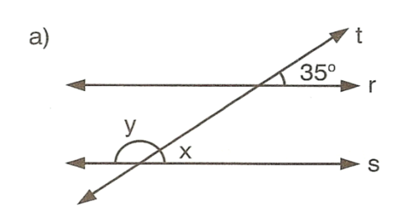
15) Sabendo que r //s, determine x:

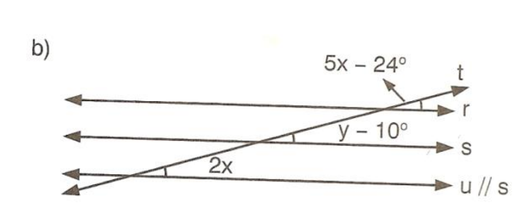




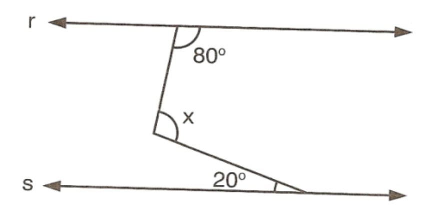


16) Sabendo que r //s, determine os ângulos indicados pelas letras:

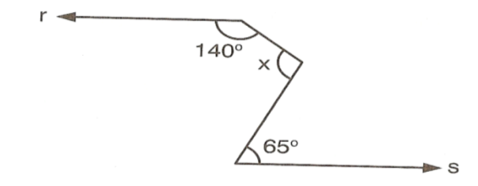




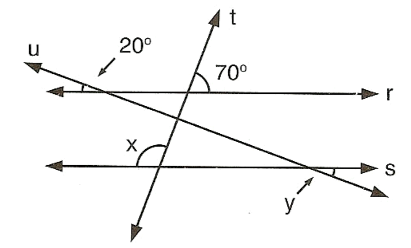
17) Sabendo que r //s, determine x:



18) Sabendo que r //s, determine x:

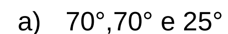


19) Na figura abaixo tem-se r //s; t e u são transversais . O valor de x + y é:

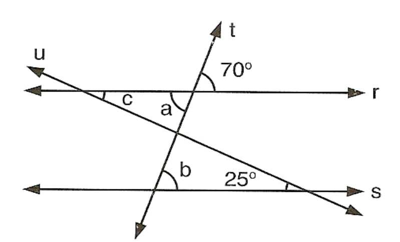


a) 100°
b) 120°
c) 130°
d) 140°

20) Na figura, r é paralela a s. As medidas dos ângulos indicados por a, b e c são, respectivamente:

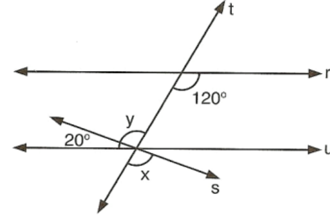


a) 70°,70° e 25°
b) 70°, 110° e 45°
c) 110°, 70° e 45°
d) 110°, 110° e 25°



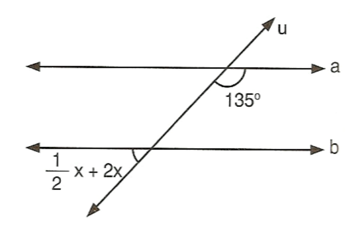
21) Considere as retas r, s, t e u todas num mesmo plano, com r //u. O valor em graus de (2x+3y) é:

a) 500°
b) 520°
c) 580°
d) 660°

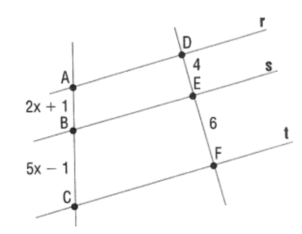


22) Sendo a paralela a b, então o valor de x :

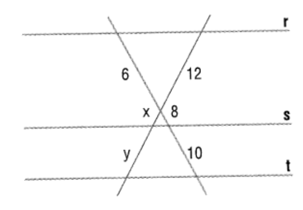
a) 45°
b) 90°
c) 18°
d) 60°30’10”



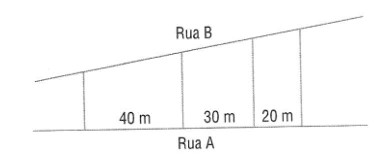
23) Na figura , r // s // t . Determine a medida do segmento $\overline{AB}$.



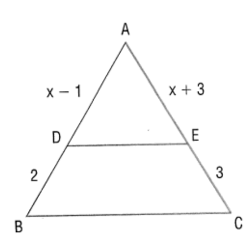
24) Na figura, r // s // t. qual é o valor de xy?



25) Três terrenos têm frentes para a rua A e para a rua B, como na figura. As divisas laterais são perpendiculares à rua A. Qual a medida de frente para a rua B de cada lote sabendo que a frente total para essa rua tem 180 m?



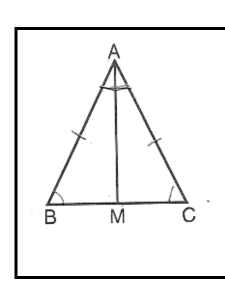
26) Na figura,a reta DE é paralela ao lado BC do triângulo ABC. Calcule o valor de x.



27) As medidas dos três ângulos internos de um triângulo são 2x + 6°, x - 12° e 3x + 24°. Calcule a medida do ângulo externo adjacente ao maior dos ângulos internos.

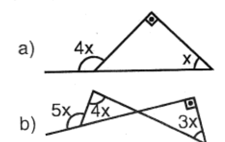
28) Os ângulos internos A, B e C de um triângulo são tais que A - B = 35 e B = 2C. Calcule o complemento de B.

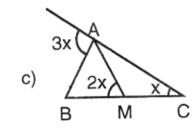
29) Na figura, AB = AC e BÂM = GÂM. Assinale as afirmativas **VERDADEIRAS.**



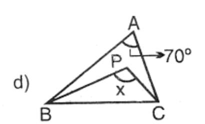
a) $\hat{B} = \hat{C}$
b) MB = MC
c) AM ⊥ BC
d)AM < AB

30) Calcule o ângulo x em cada caso:

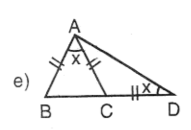




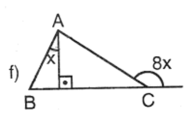
AM é bissetriz de BÂC



BP e CP são bissetrizes de $\hat{B}$ e $\hat{C}$



AB = AC = CD



AC = BC

31) De cada um dos vértices de um dado polígono regular, podem-se traçar 9 diagonais distintas. Calcule a medida de cada ângulo externo e de cada ângulo interno desse polígono.

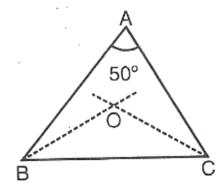
32) Determine o número de diagonais de um polígono regular cujos ângulos externos medem 40° cada um.

33) Se um polígono tem 44 diagonais, calcule a soma de seus ângulos internos.

34) Num polígono regular, o número de diagonais ultrapassa em 3 unidades o número de lados. Calcule a medida de cada um de seus ângulos internos.

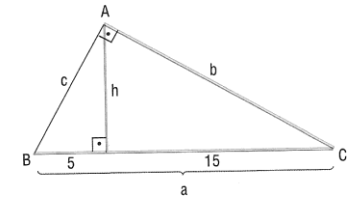
35) Num triângulo retângulo, a altura e a mediana relativas à hipotenusa formam um ângulo de 40°. Calcule as medidas dos ângulos agudos do triângulo.

36) Determine, em graus, a medida do ângulo BÔC da figura, sendo O o incentro do triângulo.



37) Calcule a altura relativa à hipotenusa e as projeções dos catetos sobre a hipotenusa no triângulo retângulo de catetos 8 cm e 12 cm.

38) Calcule as medidas b, c e h indicadas no triângulo retângulo a seguir:



39) Dado um triângulo eqüilátero de lado a, calcule sua altura.

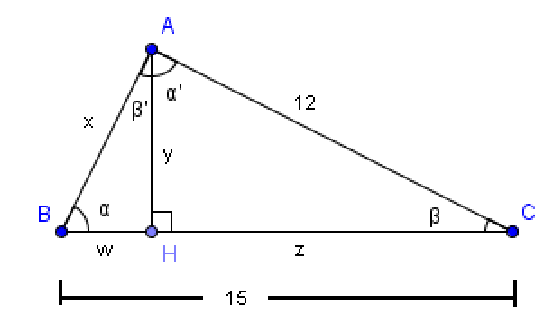
40) Num triângulo retângulo, a razão entre as projeções dos catetos sobre a hipotenusa é $\frac{9}{16}$. Sabendo que a hipotenusa mede 10 cm, calcule a medida dos catetos.

41) Dado um quadrado de lado a, calcule a medida das diagonais desse quadrado.

42) Durante um treinamento, dois maratonistas partem de uma mesma cidade em direção reta; um em sentido leste e outro em sentido norte. Determine a distância que os separa depois de 2 h sabendo que as velocidades dos atletas são de 20 km/h e 25 km/h, respectivamente.

43) Uma torre de televisão de 40 m de altura vai ser sustentada por três cabos de mesmo comprimento. Os cabos serão presos na torre a 25 m de altura e os três ganchos no solo para prender os cabos estarão a 6 m da base da torre. Quantos metros de cabo, aproximadamente, serão necessários para a sustentação da torre?

44) Determine o valor de x, y, z e w no triângulo retângulo abaixo.



43) Numa circunferência de 10 cm de raio, calcule as medidas do lado e do apótema de um :

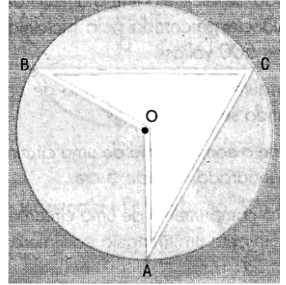
a) Triângulo eqüilátero inscrito;
b) Quadrado inscrito
c) Hexágono regular inscrito

44) Um triângulo eqüilátero de lado 5 cm está inscrito numa circunferência de raio r. Qual a medida do diâmetro dessa circunferência ?

45) Determine o perímetro do hexágono regular inscrito numa circunferência de raio igual a 5 cm.

46) Determine a razão entre o apótema de uma quadrado e o lado de um triângulo eqüilátero, ambos inscritos numa circunferência de raio igual a 6 cm.

47) Para fins beneficentes, foi organizado um desfile de modas num salão em forma de círculo, com 20 m de raio. A passarela foi montada de acordo com a figura, sendo as passarelas CA e CB os lados que correspondem a um triângulo eqüilátero inscrito na circunferência. No espaço sombreado, ocupado pela platéia, foram colocadas cadeiras, sendo uma cadeira por metro quadrado e um ingresso para cada cadeira . Adotando $\sqrt{3} = 1,73$ determine quantos metros cada modelo desfilou, seguindo uma única vez o roteiro BC, CA, AO, OB.



48) A distância entre dois lados paralelos de um hexágono regular é igual a $2\sqrt{3}$ cm. A medida do lado desse hexágono, em centímetros, é:

$a)\sqrt{3}$

$b)2$

$c)2,5$

$d)3$

$e)4$

49) O lado de um quadrado inscrito em um disco de raio R é a – b e o lado do triângulo eqüilátero inscrito no mesmo disco é a + b. Então $\frac{b}{a}$ vale:

$a)5-2\sqrt{6}$

$b)\frac{7}{3}$

$c)5+2\sqrt{6}$

$d)\sqrt{13}$

50) Um quadrado cujo perímetro mede 8 m está inscrito num disco. A altura do triângulo eqüilátero inscrito no mesmo disco mede, em metros:

$a)3\sqrt{2}/2$

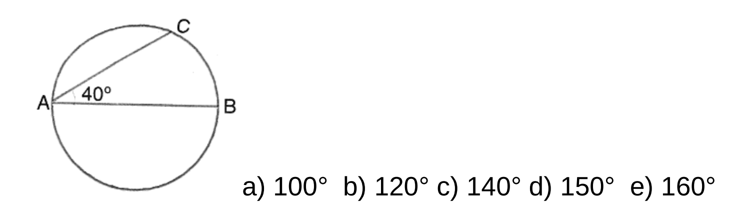
$b)3\sqrt{3}/2$

$c)2\sqrt{2}/2$

$d)2\sqrt{3}/3$

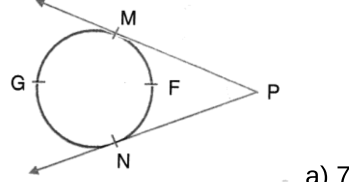
$e)4\sqrt{2}$

51) (PUC-SP) Na figura, AB é diâmetro da circunferência. O menor dos arcos (AC) mede:



a) 100° b) 120° c) 140° d) 150° e) 160°

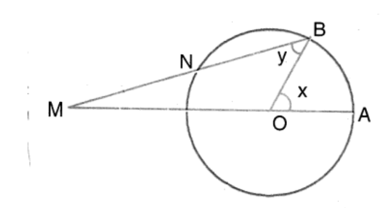
52) (Cesgranrio) As semi-retas PM e PN são tangentes ao círculo da figura e o comprimento do arco (MGN) é 4 vezes o do arco (MFN). O ângulo MPN vale



a) 76° b) 80° c) 90° d) 108° e) 120°

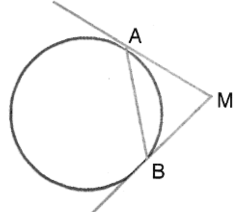
53) Na figura abaixo, O é o centro do círculo, a = 20° e b = 80°. Então, podemos afirmar que:
a) x = 30°
b) x> a
c) x = b - a
d) AD = AP
e) PA = AB

54) Na figura, MN = OB. Se AÔB = x, então ângulo
MBO = Y é: (O é o centro do círculo.)



a} *4x/7* b) *x/2* c) *3x/5* *d)5x/6* e) *2x/3*

55) De um ponto M, exterior a um círculo de centro O, traçam-se as tangentes MA e MB. Se a corda AB é lado de um pentágono regular inscrito nesse círculo, a medida do ângulo AMB é

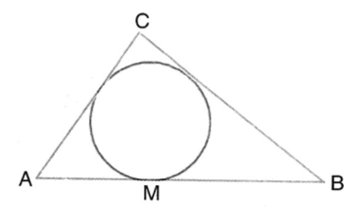


a) 144° b) 108° c) 100° d) 96° e) 72°

56) (Fuvest-SP) Numa circunferência, está inscrito um triângulo ABC; seu lado BC é igual ao raio da circunferência. O ângulo BÂC mede

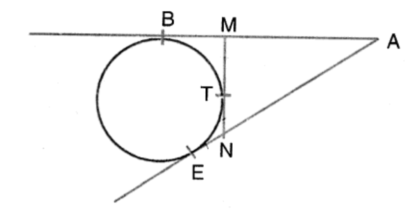
a) 15° b) 30° c) 36° d) 45° e) 60°

57) (UFMG) Na figura, o círculo está inscrito no triângulo ABC cujos lados medem AB = 9 cm, BC = 8 cm, AC = 5 cm e M é o ponto de tangência. A medida de MB é :



a)5 cm b) 5,5 cm c) 6 cm d) 6,5 cm e) 7 cm

58) (FEI-Adaptação) Se AB = 10 cm, então o perímetro do triângulo AMN vale (E, B e T são pontos de tangência)



a) 10cm b) 15 cm c) 20 cm d) 30 cm

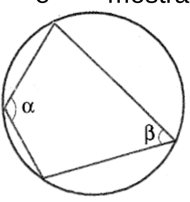
59) ABCD é um quadrilátero circunscrito a um círculo. AB = 7 e CD = 10 são lados opostos. O perímetro de ABCD mede

a) 26 b) 28 c) 32 d)34 e)36

60)(EPUSP) As bases de um trapézio isósceles
circunscrito a uma circunferência medem 9 m e 6 m. Cada um dos outros dois lados do trapézio mede

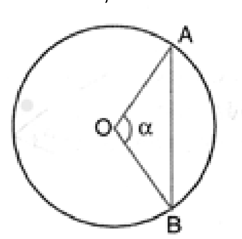
a) 4,5 m b) 6m c) 7,5m d) 8 m e) N.R.A.

61) (Cesgranrio) Um quadrilátero convexo está inscrito em um círculo. A soma, em radianos, dos ângulos α e β mostrados na figura é



a) π /4 b) π /2 c) π d) 3π /2 e) 2π

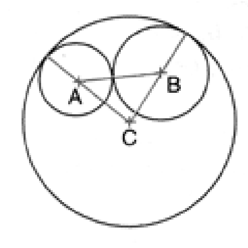
62) (UFGQ) Se a corda AB da figura é um lado de um triângulo eqüilátero inscrito na circunferência de centro em O, a medida do ângulo a, em radianos, é



a) 2π/3 b) 3π/2 c) 3π/4 d) π /3 e) π/6

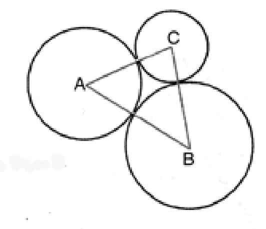
63) Dois círculos de centros A e B são tangentes exteriormente e tangenciam interiormente um círculo de centro C. Se AB=12m, AC=17m e BC=13m, determine a soma das medidas dos raios desses três círculos.

Nota
Quando dois círculos são tangentes, os centros e o ponto de tangência são colineares.



a) 30m b) 31 m c) 32m d)33m

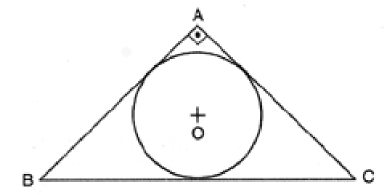
64) Os círculos da figura são tangentes dois a dois e seus centros são vértices do triângulo ABC. Se AB = 14cm, BC = 12cm e AC = 10cm, determine a soma dos raios dos círculos.



a) 16cm b) 18cm c) 20cm d) 22cm

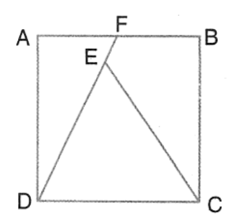
65) Duas circunferências são secantes, sendo 20 cm a distância entre seus centros. Sabendo-se que o raio da menor mede 11 cm, determine os possíveis valores do raio da maior, sabendo-se que é um número múltiplo de 9.
a) 18cm e 27cm
b) 27cm e 36cm
c) apenas 18cm
d) 18cm, 27cm e 36cm

66) (Diamantina-Adaptação) Observe a figura.



Nessa figura, o círculo de centro O está inscrito no triângulo retângulo; AC = 8 cm e BC = 10 cm. Calcule a medida do raio do círculo.
a)1cm
b) 2cm
c)3cm
d) 4cm

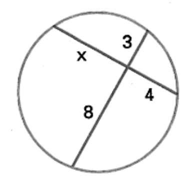
67) Na figura abaixo, ABCD é um quadrado e CED um triângulo eqüilátero. Quanto vale o suplemento do ângulo BFE?



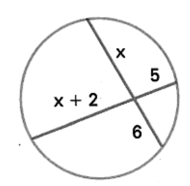
a) 30° b) 120° c) 60° d) 45°

Gabarito
a) 51,62,65, b) 55,56,64,66 c)57,58,60,61,67 d)52,53,59,63 e)54

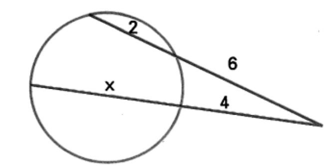
68) Determine a medida x indicada na circunferência a figura abaixo.



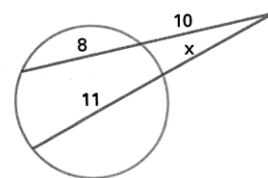
69) Na circunferência da figura abaixo, determine a medida x indicada.



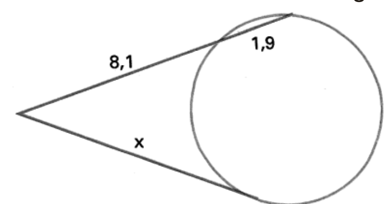
70) Determine a medida x indicada na circunferência da figura abaixo.



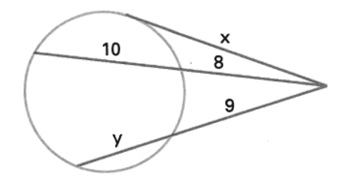
71) Determine a medida x indicada na circunferência da figura abaixo.



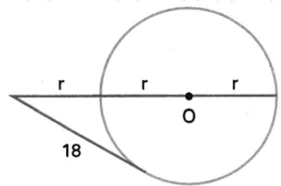
72) Determine a medida x, do segmento de reta tangente, indicada na circunferência da figura abaixo.



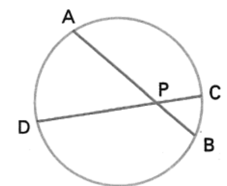
73) Na figura seguinte, determine as medidas x e y indicadas.



74) Determine a medida r do raio da circunferência da figura abaixo.



75) Na figura abaixo, PA = 3x, PB = x + 1, PC = x e PD = 4x - 1. Nessas condições, não importando a unidade, determine:



a) a medida x
b) o comprimento de cada urna das cordas

76) O raio de uma circunferência é 6 cm. De um ponto P externo, traçamos uma tangente e uma secante a essa circunferência. A secante, que encontra a circunferência nos pontos A e E, passa pelo centro e é tal que o seu segmento externo mede 8 cm. Determine a medida do segmento da tangente que foi traçada do ponto P.

77) Uma corda AB, que mede 18 cm, corta urna corda CD de tal forma que os segmentos determinados sobre CD medem x e 2x cm, respectivamente. Sabendo que a corda CD mede 12 cm, calcule as medidas dos segmentos determinados sobre a corda AB.

78) Por um ponto *P,* distante 18 cm do centro de uma circunferência, traça-se uma secante que determina na circunferência uma corda AB, que mede 8 cm. Se o comprimento do raio da circunferência é 12 cm, determine:

a) O comprimento do segmento de secante traçada do ponto *P*
b) O comprimento do segmento externo dessa secante

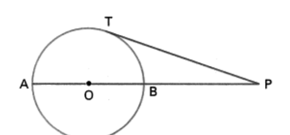
79) De um ponto *P,* situado a 3 cm de uma circunferência, traça-se um segmento de tangente PC cuja medida é 9 cm. Nessas condições, determine o comprimento do raio dessa circunferência.

80) De um ponto *P,* externo a uma circunferência, traçamos urn segmento de tangente PA e um segmento de secante. O segmento externo da secante mede 4 cm e o segmento interno tem a mesma medida que o segmento PA. Nessas condições, fazendo $\sqrt{5}$ = 2,23, determine:

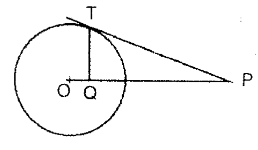
a) a medida do segmento PA
b) o comprimento do segmento de secante

81) Numa circunferência de centro O e raio 6 cm, traça-se uma corda AB**.** Sobre essa corda, toma-se um ponto M de tal forma que AM = 5 cm e OM = 4 cm. Determine a medida do segmento MB.

82) Na figura abaixo, temos que PO = 20 cm e o comprimento do raio da circunferência é 16 cm. Nessas condições, determine a medida do segmento PT.



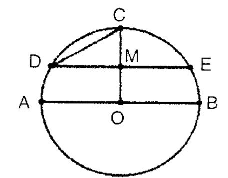
83) Observe a figura.



Nessa figura, o círculo tem centro O e raio OP = 16. A reta PT é tangente ao círculo em T e o segmento TQ é perpendicular à reta OP.
Assim sendo, o comprimento do segmento QP é :

a) 13,75 b) 13,85 c) 14,25 d) 14,5

84)(UFMG-1994) Observe a figura,



Nessa figura, o segmento AB é diâmetro da circunferência de centro O e raio 12, o segmento OC é perpendicular ao segmento AB, e o segmento DE é paralelo ao segmento AB e M é ponto médio do segmento OC.
A medida DC é:

a) 8 b) 9 c) 10 d) 11 e) 12

85) Que comprimento deve ter o lado de um quadrado para que a sua área seja igual à de um retângulo cujas dimensões são, respectivamente 24m e 12m?

86) Calcular a área do triângulo cujos lados medem, respectivamente 10m, 17m e 9m.

87) Calcular a área de um quadrado cuja diagonal mede 8m.

88) Calcular a área do losango, cujo lado tem 5 m e a distância entre dois lados paralelos é de 4,8 m.

89) Um retângulo está inscrito num círculo de raio 5 m. O perímetro do retângulo é de 28m. Determinar a área desse retângulo.

90) Dois lados contíguos de um paralelogramo medem, respectivamente, 3m e 6m, e formam um ângulo de 45^o . Determinar a área desse paralelogramo.

91) A área de um triângulo retângulo é de $24m^2$ e a hipotenusa tem 10m. Determinar os catetos desse triângulo.

92) Calcular a área do hexágono regular, cujo apótema tem $\sqrt{3}$ m.

93) Calcular a área do triângulo eqüilátero circunscrito a uma circunferência de raio 1m.

94) Determinar o comprimento de uma circunferência, sabendo-se que a área do hexágono regular inscrito vale $10{,}392m^2$.

95) Calcular a área do triângulo eqüilátero inscrito numa circunferência de raio 5m.

96) Calcular a área do triângulo eqüilátero inscrito num círculo cuja área é de $50{,}24m^2$.

97) A área de um hexágono regular tem $10{,}392m^2$. Calcular o raio do círculo circunscrito.

98) Calcular as bases de um trapézio cuja altura tem 12m, sabendo que o produto das bases, que é igual à área, vale $150m^2$.

99) Calcular a área de um trapézio isósceles cujas bases têm, respectivamente, 14dm e 6dm e o lado 5dm.

100) As bases de um trapézio têm 10m e 20m. Determinar o comprimento de uma paralela que divida o trapézio em duas partes equivalentes.

101) Calcular as dimensões e a área de um retângulo, sendo seus lados respectivamente iguais às diagonais de um losango cuja área mede $24m^2$ e o lado 5m.

102) Os lados de um triângulo são números inteiros e consecutivos e sua área mede $84m^2$. Determinar os lados desse triângulo.

GABARITO

01- a) 31º 10'. **02**-a) 26º 5''. **03-** a) 31º 17' 30''. **04-** 5 cm **05**- 76°

b) 47º 30'. b) 15º 5' 15''. b) 23º 24' 27''.

c) 111º 3'. c) 10º 55'. c) 10º 36' 44,4".

d) 39º 29' 15''.

06- 90° **07**- 44° **08-** a) 148° 14' 40''. c) 104° 37' 20''.

b) 32° 13' 20''. d) 6° 47' 40''.

09- 24°30'. **10-** complemento: 52°38'21'' ,suplemento: 142°38'21''.

11- 15° e 75°. **12-** 69°

13. a) x = 25° e y = 120° **15)** a) 21° **16)** a) x = 35° e y = 145°

b) x = 38°e y = 46° b) 30° b) x = 8° e y = 26°
c) 30°

14) a) 45° d) 30° **17)** 100º **18)** a **19)** a **20)** a **21)** a **22)** c

b) 60°

c) x = 40° e y = 40°

d) a = 75° e x = 105°

23) 3,5 **24)** 320 **25)** 80m, 60m e 40m **26)** 9
27) 75° **28)** 32° **29)** todas verdadeiras **30)** a) 30° b) 22°30' c) 36° d) 125° e) 36° f) 18°

31) ângulo interno = 150º externo = 30º **32)** 27

33) 1620º **34)** 120º **35)** 25º e 120º **36)** 115º

37) $H = \frac{24\sqrt{13}}{13}; m = \frac{16\sqrt{13}}{13}$

$n = \frac{36\sqrt{13}}{13}$

38) $b = 10\sqrt{3}, c = 10, h = 5\sqrt{3}$

39) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ 4)6 cm e 8 cm

40) $a\sqrt{2}$ 6)aprox.64 km

41) aprox.77,2 km

42) $x = 9$, $y = \frac{36}{5}, z = \frac{48}{5}, w = \frac{27}{5}$

43) a) 17,32 cm e 5 cm

b) 14,14 cm e 7,07 cm

c) 10cm e 8,66 cm

44) 5,77 cm **45)** 30 cm **46)** $\sqrt{6}/3$ **47)** 109,2 m **48)** b **49)** a **50)** a

68) 6 **69)** 10 **70)** 8 **71)** 9 **72)** 9 **73)**X = 12 E Y = 7

74) $9\sqrt{2}$ **75)** a) 4 b) AB = 17 CD = 19 **76)** $2\sqrt{6}$ **77)** 16 cm e 2 cm

78)a) 18 cm b) 10 cm **79)** 12 cm **80)** a) 6,46 cm b) 10,46 cm

81) 4 cm **82)** 12 cm **83)** a **84)** e

85) 16,9m **86)** $36m^2$ **87)** $32m^2$ **88)** $24m^2$ **89)** $48m^2$ **90)** $12,72m^2$

91) 6m e 8m **92)** m2 **93)** 5,196m2 **94)** 12,5664m2 **95)** 32,475m2 **96)** 20,78m2

97) 2m **98)** 10m e 15m **99)** 30dm2 **100)** 15,81m **101)** 8m, 6m, 48m2

102) 13, 14 e 15 metros

REVISÃO:

1) Analise as proposições:

I. Dois segmentos adjacentes são colineares.
II. Dois segmentos que têm apenas um ponto em comum são *consecutivos*.
III. Se MA = MB, então M é ponto médio de AB.

Podemos afirmar que

a) apenas I é verdadeira.
b) apenas II e III são verdadeiras.
c) apenas I e III são verdadeiras.
d) apenas III é verdadeira.
e) todas são verdadeiras.

3) Sejam AB = 12 cm e BC = 20 cm segmentos adjacentes e sejam M e N pontos médios de AB e AC, respectivamente. Podemos afirmar que a medida de MN é

a)10cm b)12cm c)16cm d)18cm e)20cm

4) Sejam O, A, B e C quatro pontos de uma reta, dispostos nessa ordem, tais que OA = 3 cm, OB = 5 cm, 4AB + AC - 2BC = 6 cm. A medida de OC, em centímetros, é

$a)\frac{4}{3}$ b) 2 c) 6 d) 9 e) 10

5) Considere os pontos A, B, C e D, tomados nessa ordem sobre uma reta. Se BC = $\frac{1}{2}$ AB, CD = $\frac{3}{4}$ BC e AD = 12, então AB mede

a) 3,2 b) 4,0 c) 6,0 d) 6,2 e) 6,4

6) Seja M um ponto interior a um segmento A8, de modo $\frac{MA}{MB} = \frac{3}{7}$. Sendo AB = 5, a diferença MB - MA será

a) 1,0 b) 1,5 c) 2,0 d) 2,5 e) 3,0

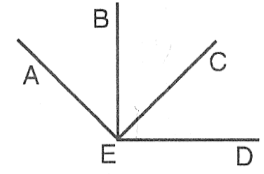
7) (UFMG) Se a medida de um ângulo é 26° 40' 51 “, sua terça parte mede

a) 8° 13' 17"
a) 8° 13' 37"
c) 8° 33' 37"
d) 8° 53' 17"

8) (UFMG) As bissetrizes de dois ângulos consecutivos formam um ângulo de 46°. Se um dos ângulos mede 32°, a medida do outro é

a) 23° b) 39° c) 55° d) 60° e) 62°

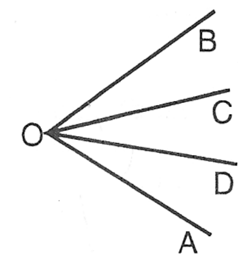
9) (UFMG) Na figura, $BE \perp ED,$ $AE \perp EC$ e $A\hat{E}D = 144°$. O ângulo $B\hat{E}C$ mede:



a) 30°
b) 32°
c) 34°
d) 36°
e) 54°

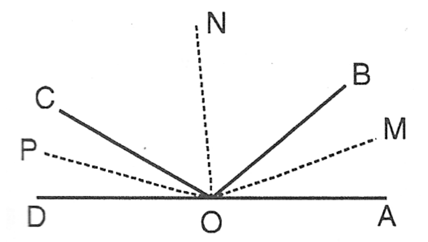
10) (UFMG) Na figura, OC é a bissetriz do ângulo AÔB, BÔD = 50° e AÔD = 22°. A medida do ângulo OÔC é:

a) 36°
b) 28°
c) 22°
d) 16°
e) 14°



11) (UFMG - Adaptação) Na figura, OM, ON e OP são bissetrizes dos ângulos AÔB, BÔC e CÔD, respectivamente. D. O e A são alinhados

A soma PÔD + MÔN é igual a
a)120°
b) 90°
c) 75°
d) 60°
e) 45°



12) Dois ângulos adjacentes medem (3x -10°) e (2x + 20°).
A diferença dos dois ângulos é

a) 12° b) 10° c) 8° d) 6° e) 4°

13) (U.F.Uberlândia) Dois ângulos consecutivos são complementares. Então, o ângulo formado pelas bissetrizes desses ângulos é

a) 20° b) 30° c) 35° d) 40° e) 45°

14) O suplemento de um ângulo excede o próprio ângulo em 50°. O complemento desse ângulo mede

a) 65° b) 50° c) 45° d) 35° e) 25°

15) A diferença entre o complemento de um ângulo e a nona parte de seu suplemento é de 6°. A medida desse ângulo é

a) 36° b) 45° c) 67° d) 72° e) 80°

16) Dois ângulos x e y são adjacentes. Se o suplemento de x é igual ao complemento de y, então o ângulo x é igual a

a) 3y b) 2y c) y + 60° d) 120° e)150°

17) O complemento do ângulo agudo AÔB supera em 6° os $\frac{2}{5}$ de seu suplemento. A medida de AÔB é

a) 20° b) 44° c) 64° d) 60° e) 70°

18) Dois ângulos opostos pelo *vértice* medem, em graus, (4m + 10)° e (2m + 30)°. O complemento de cada um desses ângulos é

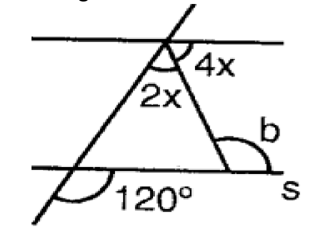
a) 30° b) 40° c) 50° d) 70° e) 80°

19) (Cesgranrio) Duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, de modo que a soma de dois dos ângulos agudos formados *vale* 72°. Então, qualquer dos ângulos obtusos formados mede :

a)142° b) 144° c) 148° d) 150° e) 152°

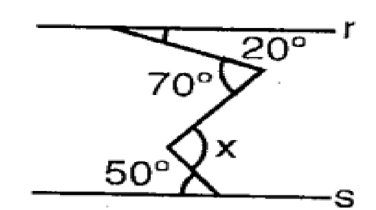
20) (UFGO) Na figura abaixo, as retas r e s são paralelas.A medida do ângulo b é:

a) 100°
b) 120°
c) 110°
d) 140°
e) 130°



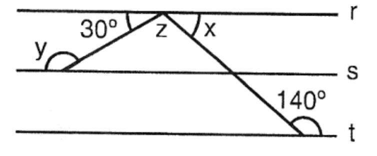
21) As retas r e s são paralelas. Então, o valor de x é:

a) 100°
b) 120°
c) 110°
d) 140°
e) 130°



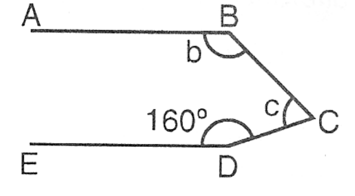
22) As retas r, s e t da figura abaixo são paralelas entre si. Sendo x, y, e z as medidas, em graus, dos ângulos indicados, a soma x + y + z é igual a

a) 180°
b) 200°
c) 240°
d) 300°
e) 360°



23) Na figura abaixo, AB e DE são segmentos paralelos. Para D = 160°, podemos afirmar que a soma das medidas dos ângulos B e C é igual a

a) 160°
b) 180°
c) 200°
d) 210°
e) 360°



24) (PUC-SP) Considere a sentença:
"Num plano, se duas retas são ... , então toda reta ... a uma delas é ... à outra."

A *alternativa* que preenche CORRETAMENTE as lacunas é

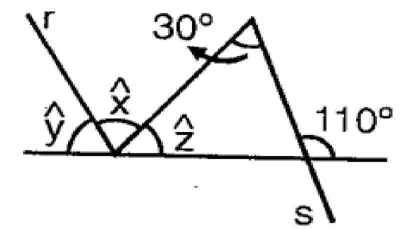
a) paralelas - perpendicular - paralela
b) perpendiculares - paralela - paralela
c) perpendiculares - perpendicular - perpendicular
d) paralelas - paralela - perpendicular
e) perpendiculares - paralela - perpendicular

25) Considere o segmento AB = 12 cm e seja M um ponto do prolongamento de AB. Calcule á medida de MB para que a razão $\frac{MA}{MB}$ seja 25.

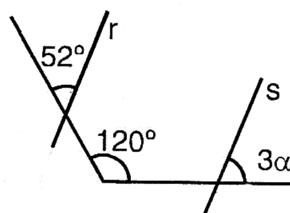
26) Calcule a medida do menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio quando está marcando

a) 10 horas e 35 minutos;
b) 3 horas e 40 minutos.

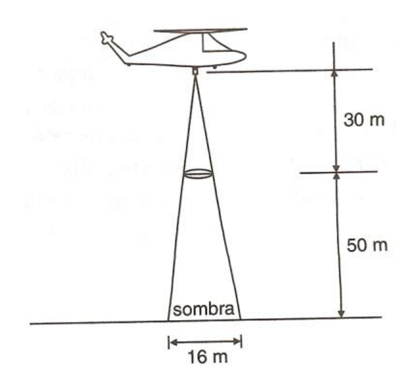
27) Na figura r // s . Calcule $\widehat{x}, \widehat{y}\ e\ \widehat{z}$.



28) Calcule α na figura, sabendo que r // s

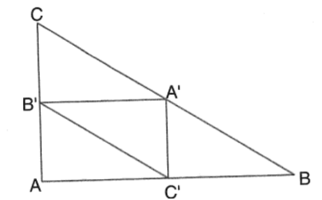


29) Numa cidade do interior, à noite, surgiu um objeto voador não identificado, em forma de disco, que estacionou a 50 m do solo, aproximadamente. Um helicóptero do Exército, situado aproximadamente 30 m acima do objeto, iluminou-o com um holofote, conforme mostra a figura. Pode-se afirmar que o raio do disco voador mede, em metros, aproximadamente:



a) 3,0 b) 3,5 c) 4,0 d) 4,5 e) 5,0

30) (UE-RJ) Unindo-se os pontos médios dos lados do triângulo ABC, obtém-se um novo triângulo A'B'C', como mostra a figura.



Se S e S' são, respectivamente, as áreas de ABC e A'B'C', a razão $\frac{S}{S'}$ equivale a:

a) 4 b) 2 c) $\sqrt{3}$ d) $\frac{3}{2}$

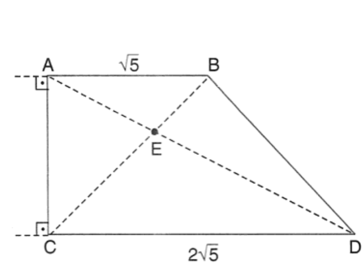
31) (PUC-RS) Para medir a altura de uma árvore, foi usada uma vassoura de 1,5 m, verificando-se que, no momento em que ambas estavam em posição vertical em relação ao terreno, a vassoura projetava uma sombra de 2 m e a árvore, de 16 m. A altura da árvore, em metros, é:

a) 3,0 b) 8,0 c) 12,0 d) 15,5 e) 16,0

32) (UF-MA) O ângulo agudo de um losango mede 60° e sua diagonal maior tem medida $3\sqrt{2}$ m. Nessas condições, a medida do lado do losango é:

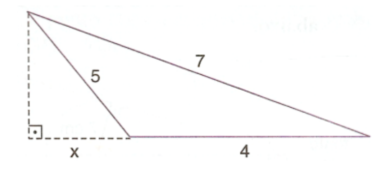
$a) 2m$
$b) 3m$
$c) \sqrt{2}m$
$d) \sqrt{3}m$
$e) \sqrt{6}m$

33) (Mackenzie-SP) Na figura, se o triângulo ABC é isósceles, a medida de AE é



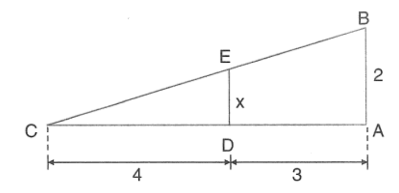
$a) \frac{4}{3}$
$b) \sqrt{3}$
$c) \frac{2}{3}$
$d) \sqrt{2}$
$e) \frac{5}{3}$

34) O valor de x, no triângulo, é:



a) 4,15 b) 1 c) 7,25 d) 5 e) 4

35) Na figura abaixo, o segmento AB é paralelo ao segmento DE. O valor de x é:



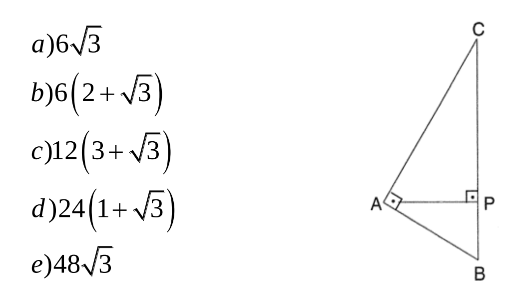
$a) \frac{2}{3}$ $b) \frac{8}{3}$ $c) \frac{2}{7}$ $d) \frac{8}{7}$ $e) 1$

36) Se num triângulo retângulo a medida da mediana relativa à hipotenusa é 5 cm, então a hipotenusa mede:

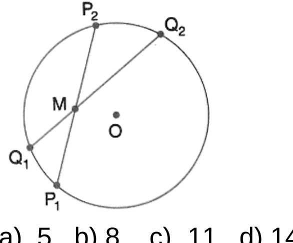
a) 8 cm b) 9 cm c) 10 cm d) 11 cm e) 12 cm

37) Na figura abaixo, $\frac{PB}{PC} = \frac{1}{3}$. Se PA = 12 cm, o perímetro do triângulo APC, em cm, é igual a:

$a) 6\sqrt{3}$
$b) 6\left(2+\sqrt{3}\right)$
$c) 12\left(3+\sqrt{3}\right)$
$d) 24\left(1+\sqrt{3}\right)$
$e) 48\sqrt{3}$

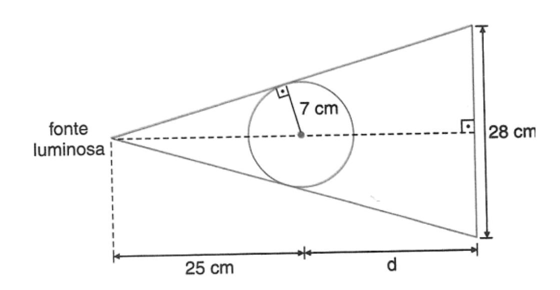


38) A circunferência da figura tem centro no ponto O e M é o ponto de interseção das cordas $\overline{P_1P_2}$ ë $\overline{Q_1Q_2}$. Se $P_1M = 4cm$, $MP_2 = (k+1)cm$, $Q_1M = 3cm$ e $MQ_2 = (3k-7)cm$, então a corda $\overline{Q_1Q_2}$, em cm, mede:



a) 5   b) 8   c) 11   d) 14

39) (UF-GO) Uma fonte luminosa a 25 cm do centro de uma esfera projeta sobre uma parede uma sombra circular de 28 cm de diâmetro, conforme figura abaixo.



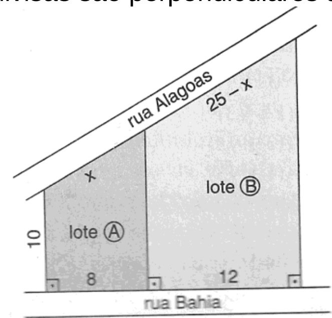
Se o raio da esfera mede 7 cm, a distância (d) do centro da esfera até a parede, em centímetros é:

a) 23 c) 28 e) 35
b) 25 d) 32

40) (UF- RN) Uma escada de 13,0 m de comprimento encontra-se com a extremidade superior apoiada na parede vertical de um edifício e a parte inferior apoiada no piso horizontal desse mesmo edifício, a uma distância de 5,0 m da parede. Se o topo da escada deslizar 1,0 m para baixo, o valor que mais se aproxima de quanto a parte inferior escorregará é:

a) 1,0 m c) 2,0 m
b) 1,5 m d) 2,6 cm

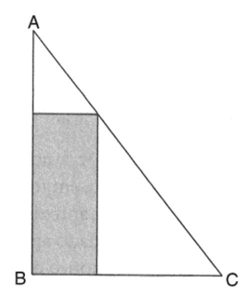
41) (Ucsal- BA) Na figura abaixo têm-se dois lotes de terrenos planos, com frentes para duas ruas e cujas divisas são perpendiculares à rua Bahia.



Se as medidas indicadas são dadas em metros, a área da superfície aproximada dos dois lotes, em metros quadrados é:

a) 350 b) 380 c) 420 d) 450 e) 480

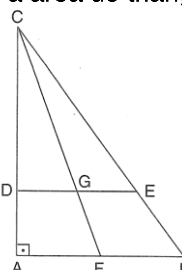
42) Considere todos os retângulos inscritos no triângulo retângulo ABC, dispostos da maneira como mostra a figura abaixo:



Se AB = 24 cm e BC = 18 cm, o maior valor q pode obter para a área de tais retângulos, em metros quadrados, é:

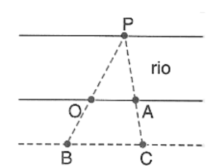
a) 96 b) 108 c)116 d)128 e) 136

43) (Fuvest -SP) Na figura, ABC é um triângulo retângulo de catetos AB = 4 e AC = 5. O segmento DE é paralelo a AB, *F* é um ponto de AB e o segmento CF intercepta DE no ponto G, com CG = 4 e GF = 2. Assim, a área do triângulo CDE é:



$a)\frac{16}{3}$ $b)\frac{35}{6}$ $c)\frac{39}{8}$ $d)\frac{40}{9}$ $e)\frac{70}{9}$

44) (Vunesp-SP) Um observador situado num ponto O, localizado na margem de um rio, precisa determinar sua distância até um ponto *P,* localizado na outra margem sem atravessar o rio. Para isso marca, com estacas, outros pontos do lado da margem em que se encontra de tal forma que P, O e *B* estão alinhados entre si e *P, A* e C também. Além disso, OA é paralelo a BC, OA = 25 m, BC = 40 m e OB = 30 m, conforme figura.



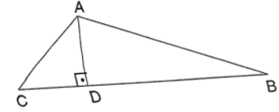
A distância, em metros, do observador em O até o ponto P, é:

a) 30 b) 35 c) 40 d) 45 e) 50

45) (UF- PI) Três cidades, P, Q e R, estão localizadas em um mapa formando um triângulo retângulo, cuja hipotenusa é PR A distância real entre Q e R é 3 km e a distância no mapa entre P e Q é 4 em. Se a escala usada no mapa é 1 : 100000, a distância real, em quilômetros, entre P e R é:

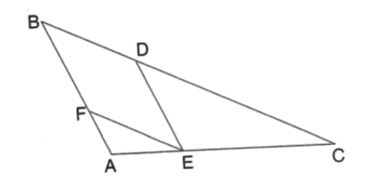
a) 7 b) 6 c) 5 d) 4 e) 3

46) (Fuvest-SP) Na figura abaixo, tem-se AC = 3, AB = 4 e CB = 6. O valor de CD é:



$a)\frac{17}{12}$ $b)\frac{19}{12}$ $c)\frac{23}{12}$ $d)\frac{25}{12}$ $e)\frac{29}{12}$

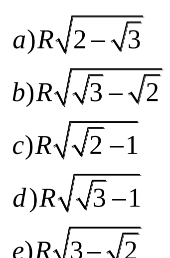
47) (Unit-SE) Na figura abaixo temos o losango BDEF inscrito no triângulo ABC.



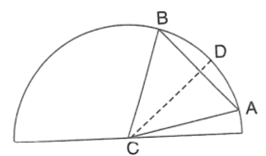
Se AB = 3 cm, BC = 6 cm e AC = 4 cm, o perímetro do losango, em cm, é:

a) 2 c) 6 e) 10
b) 4 d) 8

48) (Fuvest-SP) Em uma semicircunferência de centro C e raio R, inscreve-se um triângulo eqüilátero ABC. Seja D o ponto onde a bissetriz do ângulo ACB intercepta a semicircunferência. O comprimento da corda AD é:



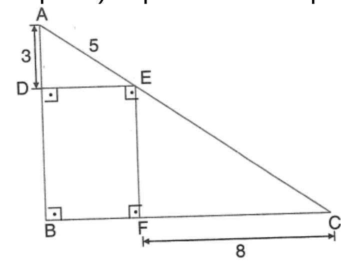
$a)R\sqrt{2-\sqrt{3}}$
$b)R\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$
$c)R\sqrt{\sqrt{2}-1}$
$d)R\sqrt{\sqrt{3}-1}$
$e)R\sqrt{3-\sqrt{2}}$



49) (UF-RN) Um grande vale é cortado por duas estradas retilíneas, E_1 e E_2, que se cruzam perpendicularmente, dividindo-o em quatro quadrantes. Duas árvores que estão num mesmo quadrante têm a seguinte localização: a primeira dista 300 m da estrada E_1 e 100 m da estrada E_2, enquanto a segunda se encontra a 600 m de E_1 e a 500 m de E_2.
A distância entre as duas árvores é:

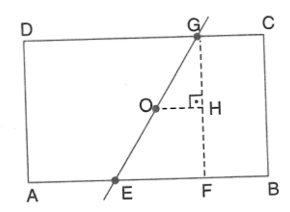
a) 200 m
b) 300m
c) 400 m
d) 500 m

50) (Umesp-SP) O perímetro do quadrilátero BDEF é igual a:



a) 12 b) 10 c) 16 d) 20 e) 24

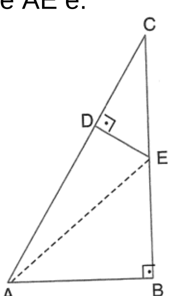
51) (Mackenzie-SP) No retângulo ABCD da figura, de área 60 cm^2, o ponto O é o encontro das diagonais, EF = 4 cm e GH = 3 cm.



A área do retângulo AFGD, em cm^2 é:

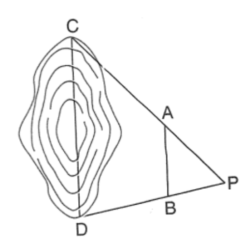
a) 42 c) 55 e) 64
b) 49 d) 36

52) (Fuvest-SP) Na figura, ABC e CDE são triângulos retângulos, AB = 1, BC = e BE = 2DE. Logo, a medida de AE é:



$a)\frac{\sqrt{3}}{2}$ $b)\frac{\sqrt{5}}{2}$ $c)\frac{\sqrt{7}}{2}$ $d)\frac{\sqrt{11}}{2}$ $e)\frac{\sqrt{13}}{2}$

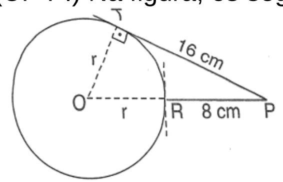
53) (U. F. Viçosa-MG) Para determinar o comprimento de uma lagoa, utilizou-se o esquema indicado



pela figura ao lado, onde os segmentos AB e CD são paralelos.
Sabendo-se que AB = 36 m, BP = 5 m e DP = 40m, o comprimento CD da lagoa, em metros é:

a) 188 c) 248 e) 288
b) 368 d) 208

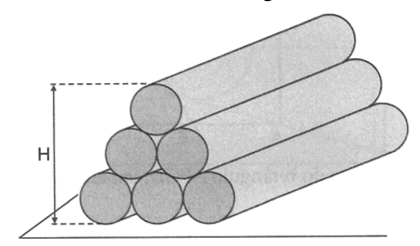
54) (UF-PI) Na figura, os segmentos de reta RP e TP medem respectivamente 8 cm e 16 cm.



Se TP é tangente à circunferência em *T,* então a medida do raio, em centímetros, é:

a) 12 b) 14 c) 16 d) 18 e) 20

55) (UF- RO) A fórmula que determina a altura H de uma pilha de tubos, todos com forma cilíndrica circular reta e com raio externo R, conforme a figura, é:



a) $H=R(\sqrt{3}+2)$

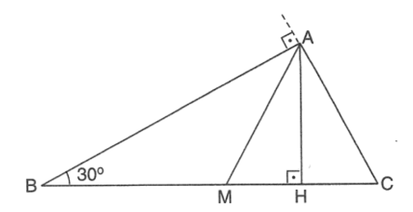
b) $H = 3R(\sqrt{2} + 1)$

c) $H = 2R\sqrt{3}$

d) $H = 2R(\sqrt{3} + 1)$

e) $H = R(\sqrt{2} + 3)$

56) (Mackenzie-SP) No triângulo retângulo ABC da figura, AM é a mediana e AH é a altura, ambas relativas à hipotenusa.
Se BC = 6 cm, a área do triângulo AMH, em centímetros quadrados, é:

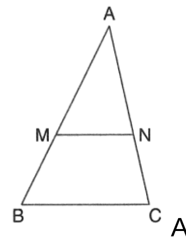


a) $\frac{8\sqrt{3}}{9}$ b) $\frac{8\sqrt{3}}{5}$ c) $\frac{9\sqrt{3}}{8}$ d) $\frac{5\sqrt{3}}{8}$ e) $\frac{9\sqrt{3}}{4}$

57) (Cefet-MG) Em um triângulo isósceles, seja ***a*** a medida de seus lados iguais, ***b*** a medida do terceiro lado e *h* a medida de sua altura, relativa ao lado *b.* Se *h, b* e *a* formam, nessa ordem, uma progressão aritmética, então a área do triângulo será igual a:

a) $\frac{\sqrt{3}b^2}{4}$ b) $\frac{\sqrt{3}h^2}{4}$ c) $\frac{b^2}{4}$ d) $\frac{15b^2}{8}$ e) $\frac{8h^2}{15}$

58) (Cefet-MG) No triângulo ABC, um segmento M paralelo a BC, divide o triângulo em duas regiões mesma área, conforme representado na figura.



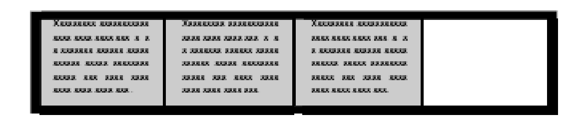
A razão $\frac{AM}{AB}$ a: a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ e) $\frac{\sqrt{2}+1}{3}$

GABARITO
a) 1, 3, 16, 19, 20
b) 11, 17, 18
c) 6, 23
d) 4, 8, 9, 15, 21, 22
e) 5, 7, 10, 12, 13, 14, 24
25) 0,5 cm 26) a) 107° 30' b) 130° 27) x = 30°, y = 70° e z = 80°
28) 22°40'
29) a
30)a 31)c 32)e 33)e 34)b 35)d 36)c 37)c 38)c 39)a 40)c 41)a 42)b 43)d 44)e 45)c 46)e 47)d 48)a 49)d 50)d 51)a 52)c 53)e 54)a 55)d 56)c 57)e 58)b

PINTOU NO ENEM

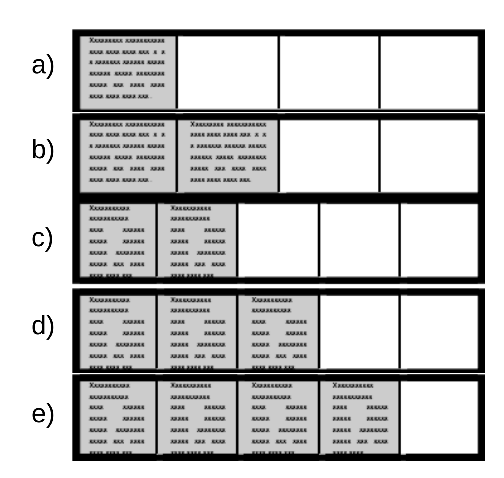
Questão 01 - (ENEM/2010)

Um professor dividiu a lousa da sala de aula em quatro partes iguais. Em seguida, preencheu 75% dela com conceitos e explicações, conforme a figura seguinte.



Algum tempo depois, o professor apagou a lousa por completo e, adotando um procedimento semelhante ao anterior, voltou a preenchê-la, mas, dessa, vez, utilizando 40% do espaço dela.

Uma representação possível para essa segunda situação é



Questão 02 (ENEM/2011)

Em uma certa cidade, os moradores de um bairro carente de espaços de lazer reivindicam à prefeitura municipal a construção de uma praça. A prefeitura concorda com a solicitação e afirma que irá construí-la em formato retangular devido às características técnicas do terreno. Restrições de natureza orçamentária impõem que sejam gastos, no máximo, 180 m de tela para cercar a praça. A prefeitura apresenta aos moradores desse bairro as medidas dos terrenos disponíveis para a construção da praça:

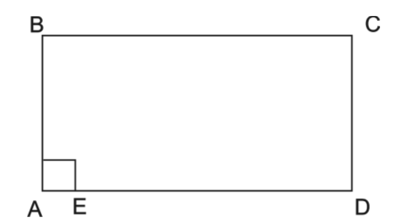
Terreno 1: 55 m por 45 m
Terreno 2: 55 m por 55 m
Terreno 3: 60 m por 30 m
Terreno 4: 70 m por 20 m
Terreno 5: 95 m por 85 m

Para optar pelo terreno de maior área, que atenda às restrições impostas pela prefeitura, os moradores deverão escolher o terreno

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 5.

Questão 03 - (ENEM/2009)

O governo cedeu terrenos para que famílias construíssem suas residências com a condição de que no mínimo 94% da área do terreno fosse mantida como área de preservação ambiental. Ao receber o terreno retangular ABCD, em que $AB = \frac{BC}{2}$, Antônio demarcou uma área quadrada no vértice A, para a construção de sua residência, de acordo com o desenho, no qual $AE = \frac{AB}{5}$ é lado do quadrado.

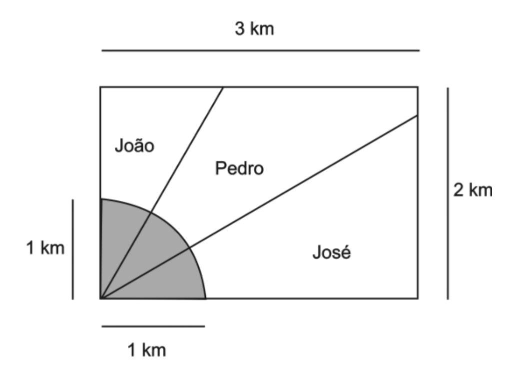


Nesse caso, a área definida por Antônio atingiria exatamente o limite determinado pela condição se ele

a) duplicasse a medida do lado do quadrado.
b) triplicasse a medida do lado do quadrado.
c) triplicasse a área do quadrado.
d) ampliasse a medida do lado do quadrado em 4%.
e) ampliasse a área do quadrado em 4%.

Questão 04 - (ENEM/2009)

Ao morrer, o pai de João, Pedro e José deixou como herança um terreno retangular de 3 km $\times$ 2 km que contém uma área de extração de ouro delimitada por um quarto de círculo de raio 1 km a partir do canto inferior esquerdo da propriedade. Dado o maior valor da área de extração de ouro, os irmãos acordaram em repartir a propriedade de modo que cada um ficasse com a terça parte da área de extração, conforme mostra a figura.

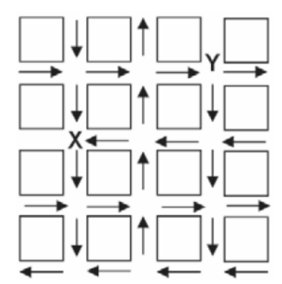


Em relação à partilha proposta, constata-se que a porcentagem da área do terreno que coube a João corresponde, aproximadamente, a (considere $\frac{\sqrt{3}}{3} = 0,58$)

a) 50%.
b) 43%.
c) 37%.
d) 33%.
e) 19%.

Questão 05 - (ENEM/2009)

O mapa ao lado representa um bairro de determinada cidade, no qual as flechas indicam o sentido das mãos do tráfego. Sabe-se que esse bairro foi planejado e que cada quadra representada na figura é um terreno quadrado, de lado igual a 200 metros.

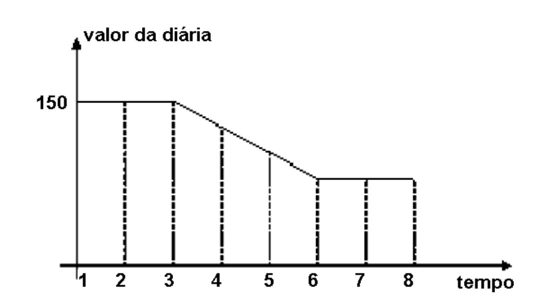


Desconsiderando-se a largura das ruas, qual seria o tempo, em minutos, que um ônibus, em velocidade constante e igual a 40 km/h, partindo do ponto X, demoraria para chegar até o ponto Y?

a) 25 min.
b) 15 min.
c) 2,5 min.
d) 1,5 min.
e) 0,15 min.

Questão 06 - (ENEM/2009)

Uma pousada oferece pacotes promocionais para atrair casais a se hospedarem por até oito dias. A hospedagem seria em apartamento de luxo e, nos três primeiros dias, a diária custaria R$ 150,00, preço da diária fora da promoção. Nos três dias seguintes, seria aplicada uma redução no valor da diária, cuja taxa média de variação, a cada dia, seria de R$ 20,00. Nos dois dias restantes, seria mantido o preço do sexto dia. Nessas condições, um modelo para a promoção idealizada é apresentado no gráfico a seguir, no qual o valor da diária é função do tempo medido em número de dias.

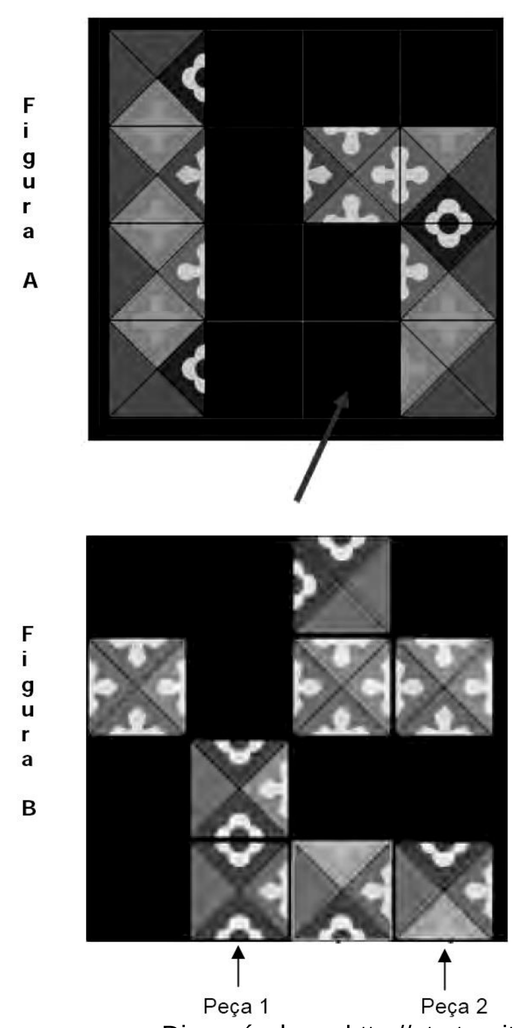


De acordo com os dados e com o modelo, comparando o preço que um casal pagaria pela hospedagem por sete dias fora da promoção, um casal que adquirir o pacote promocional por oito dias fará uma economia de

a) R$ 90,00.
b) R$ 110,00.
c) R$ 130,00.
d) R$ 150,00.
e) R$ 170,00.

Questão 07 - (ENEM/2009)

As figuras a seguir exibem um trecho de um quebra-cabeças que está sendo montado. Observe que as peças são quadradas e há 8 peças no tabuleiro da figura A e 8 peças no tabuleiro da figura B. As peças são retiradas do tabuleiro da figura B e colocadas no tabuleiro da figura A na posição correta, isto é, de modo a completar os desenhos.



Disponível em: http://pt.eternityii.com. Acesso em: 14 jul. 2009.

É possível preencher corretamente o espaço indicado pela seta no tabuleiro da figura A colocando a peça

a) 1 após girá-la 90° no sentido horário.
b) 1 após girá-la 180° no sentido anti-horário.
c) 2 após girá-la 90° no sentido anti-horário.
d) 2 após girá-la 180° no sentido horário.
e) 2 após girá-la 270° no sentido anti-horário.

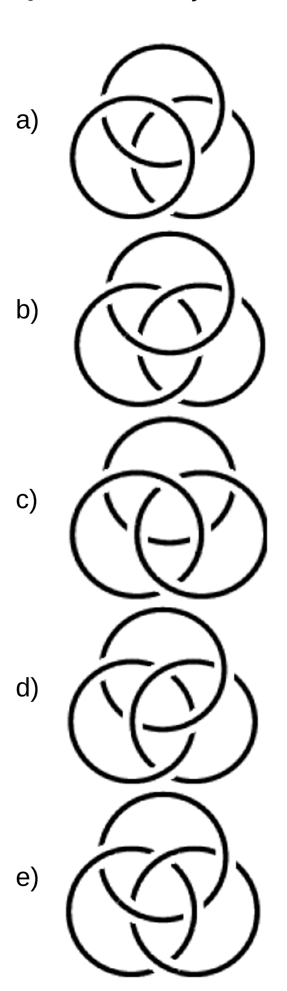
Questão 08 - (ENEM/2009)

Em Florença, Itália, na Igreja de Santa Croce, é possível encontrar um portão em que aparecem os anéis de Borromeo. Alguns historiadores acreditavam que os círculos representavam as três artes: escultura, pintura e arquitetura, pois elas eram tão próximas quanto inseparáveis.



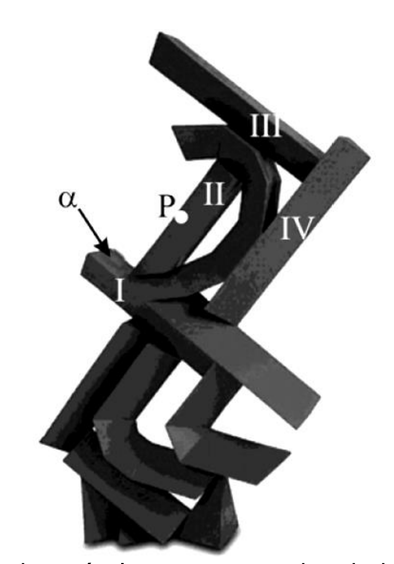
Scientific American, ago. 2008.

Qual dos esboços a seguir melhor representa os anéis de Borromeo?



Questão 09 - (ENEM/2009)

Suponha que, na escultura do artista Emanoel Araújo, mostrada na figura a seguir, todos os prismas numerados em algarismos romanos são retos, com bases triangulares, e que as faces laterais do poliedro II são perpendiculares à sua própria face superior, que, por sua vez, é um triângulo congruente ao triângulo base dos prismas. Além disso, considere que os prismas I e III são perpendiculares ao prisma IV e ao poliedro II.



Disponível em: www.escritosriodearte.com.br. Acesso em: 28 jul. 2009.

Imagine um plano paralelo à face α do prisma I, mas que passe pelo ponto P pertencente à aresta do poliedro II, indicado na figura. A interseção desse plano imaginário com a escultura contém

a) dois triângulos congruentes com lados correspondentes paralelos.
b) dois retângulos congruentes e com lados correspondentes paralelos.
c) dois trapézios congruentes com lados correspondentes perpendiculares.
d) dois paralelogramos congruentes com lados correspondentes paralelos.
e) dois quadriláteros congruentes com lados correspondentes perpendiculares.

Questão 10 - (ENEM/2009)

A rampa de um hospital tem na sua parte mais elevada uma altura de 2,2 metros. Um paciente ao caminhar sobre a rampa percebe que se deslocou 3,2 metros e alcançou uma altura de 0,8 metro.

A distância em metros que o paciente ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa é

a) 1,16 metros.
b) 3,0 metros.
c) 5,4 metros.
d) 5,6 metros.
e) 7,04 metros.

Questão 11 - (ENEM/2009)

Rotas aéreas são como pontes que ligam cidades, estados ou países. O mapa a seguir mostra os estados brasileiros e a localização de algumas capitais identificadas pelos números. Considere que a direção seguida por um avião AI que partiu de Brasília – DF, sem escalas, para Belém, no Pará, seja um segmento de reta com extremidades em DF e em 4.

MAPA DO BRASIL E ALGUMAS CAPITAIS



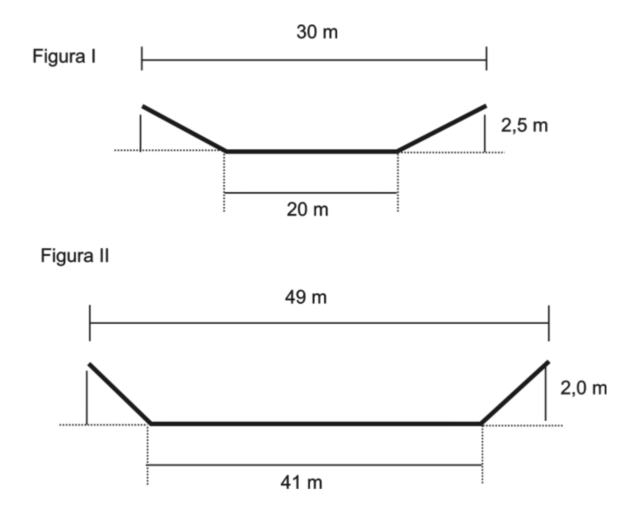
SIQUEIRA, S. **Brasil Regiões**. Disponível em: www.santiagosiqueira.pro.br. Acesso em: 28 jul. 2009 (adaptado).

Suponha que um passageiro de nome Carlos pegou um avião AII, que seguiu a direção que forma um ângulo de 135º graus no sentido horário com a rota Brasília – Belém e pousou em alguma das capitais brasileiras. Ao desembarcar, Carlos fez uma conexão e embarcou em um avião AIII, que seguiu a direção que forma um ângulo reto, no sentido anti-horário, com a direção seguida pelo avião AII ao partir de Brasília-DF. Considerando que a direção seguida por um avião é sempre dada pela semirreta com origem na cidade de partida e que passa pela cidade destino do avião, pela descrição dada, o passageiro Carlos fez uma conexão em

a) Belo Horizonte, e em seguida embarcou para Curitiba.
b) Belo Horizonte, e em seguida embarcou para Salvador.
c) Boa Vista, e em seguida embarcou para Porto Velho.
d) Goiânia, e em seguida embarcou para o Rio de Janeiro.
e) Goiânia, e em seguida embarcou para Manaus.

Questão12 - (ENEM/2009)

A vazão do rio Tietê, em São Paulo, constitui preocupação constante nos períodos chuvosos. Em alguns trechos, são construídas canaletas para controlar o fluxo de água. Uma dessas canaletas, cujo corte vertical determina a forma de um trapézio isósceles, tem as medidas especificadas na figura I. Neste caso, a vazão da água é de 1.050 m^3/s. O cálculo da vazão, Q em m^3/s, envolve o produto da área A do setor transversal (por onde passa a água), em m^2, pela velocidade da água no local, v, em m/s, ou seja, Q = Av.
Planeja-se uma reforma na canaleta, com as dimensões especificadas na figura II, para evitar a ocorrência de enchentes.



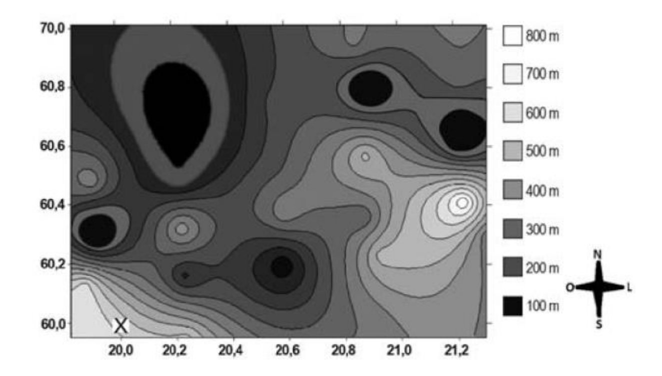
Disponível em: www2.uel.br.

Na suposição de que a velocidade da água não se alterará, qual a vazão esperada para depois da reforma na canaleta?

a) 90 m^3/s.
b) 750 m^3/s.
c) 1.050 m^3/s.
d) 1.512 m^3/s.
e) 2.009 m^3/s.

Questão 13 - (ENEM/2010)

A figura a seguir é a representação de uma região por meio de curvas de nível, que são curvas fechadas representando a altitude da região, com relação ao nível do mar. As coordenadas estão expressas em graus de acordo com a longitude, no eixo horizontal, e a latitude, no eixo vertical. A escala em tons de cinza desenhada à direita está associada à altitude da região.



Um pequeno helicóptero usado para reconhecimento sobrevoa a região a partir do ponto X = (20; 60). O helicóptero segue o percurso:

0,8º L → 0,5º N → 0,2º O → 0,1º S → 0,4º N → 0,3 ºL.

Ao final, desce verticalmente até pousar no solo.

De acordo com as orientações, o helicóptero pousou em um local cuja altitude é

a) menor ou igual a 200 m.
b) maior que 200 m e menor ou igual a 400 m.
c) maior que 400 m e menor ou igual a 600 m.
d) maior que 600 m e menor ou igual a 800 m.
e) maior que 800 m.

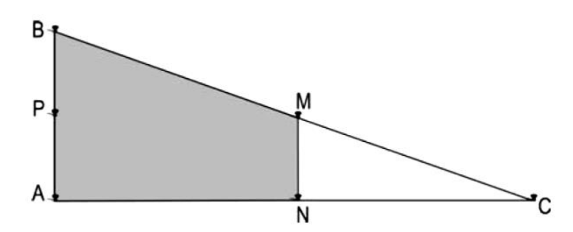
Questão 14 - (ENEM/2010)

A loja Telas & Molduras cobra 20 reais por metro quadrado de tela, 15 reais por metro linear de moldura, mais uma taxa fixa de entrega de 10 reais.
Uma artista plástica precisa encomendar telas e molduras a essa loja, suficientes para 8 quadros retangulares (25 cm x 50 cm). Em seguida, fez uma segunda encomenda, mas agora para 8 quadros retangulares (50 cm x 100 cm). O valor da segunda encomenda será

a) o dobro do valor da primeira encomenda, porque a altura e a largura dos quadros dobraram.
b) maior do que o valor da primeira encomenda, mas não o dobro.
c) a metade do valor da primeira encomenda, porque a altura e a largura dos quadros dobraram.
d) menor do que o valor da primeira encomenda, mas não a metade.
e) igual ao valor da primeira encomenda, porque o custo de entrega será o mesmo.

Questão 15 - (ENEM/2010)

Em canteiros de obras de construção civil é comum perceber trabalhadores realizando medidas de comprimento e de ângulos e fazendo demarcações por onde a obra deve começar ou se erguer. Em um desses canteiros foram feitas algumas marcas no chão plano. Foi possível perceber que, das seis estacas colocadas, três eram vértices de um triângulo retângulo e as outras três eram os pontos médios dos lados desse triângulo, conforme pode ser visto na figura, em que as estacas foram indicadas por letras.



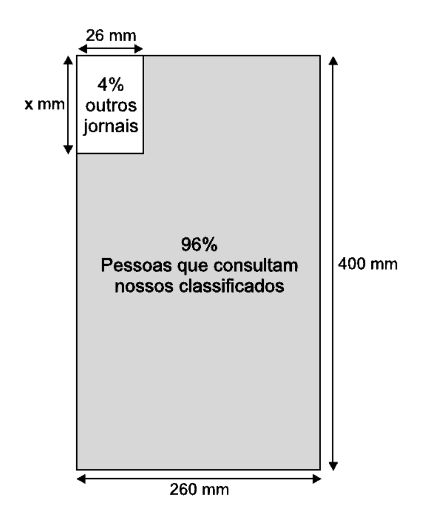
A região demarcada pelas estacas A, B, M e N deveria ser calçada com concreto.

Nessas condições, a área a ser calçada corresponde

a) à mesma área do triângulo AMC.
b) à mesma área do triângulo BNC.
c) à metade da área formada pelo triângulo ABC.
d) ao dobro da área do triângulo MNC.
e) ao triplo da área do triângulo MNC.

Questão 16 - (ENEM/2010)

O jornal de certa cidade publicou em uma página inteira a seguinte divulgação de seu caderno de classificados.



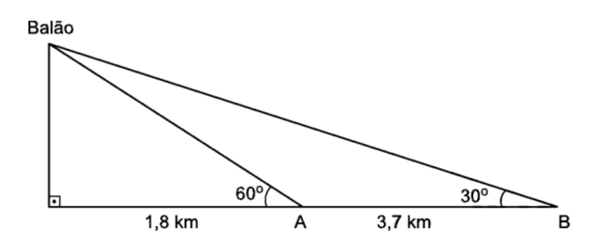
Para que a propaganda seja fidedigna à porcentagem da área que aparece na divulgação, a medida do lado do retângulo que representa os 4%, deve ser de aproximadamente

a) 1 mm.
b) 10 mm.
c) 17 mm.
d) 160 mm.
e) 167 mm.

Questão 17 - (ENEM/2010)

Um balão atmosférico, lançado em Bauru (343 quilômetros a Noroeste de São Paulo), na noite do último domingo, caiu nesta segunda-feira em Cuiabá Paulista, na região de Presidente Prudente, assustando agricultores da região. O artefato faz parte do programa Projeto Hibiscus, desenvolvido por Brasil, França, Argentina, Inglaterra e Itália, para a medição do comportamento da camada de ozônio, e sua descida se deu após o cumprimento do tempo previsto de medição.

Disponível em: http://www.correiodobrasil.com.br.
Acesso em: 02 maio 2010.



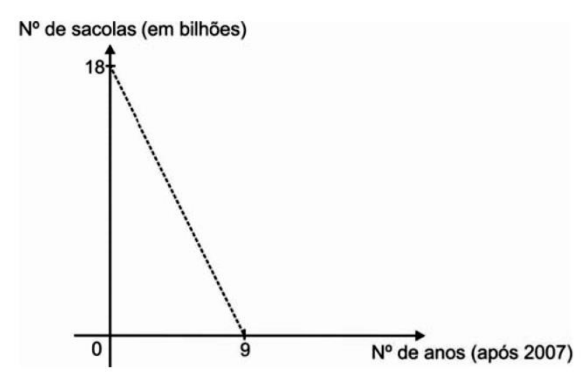
Na data do acontecido, duas pessoas avistaram o balão. Uma estava a 1,8 km da posição vertical do balão e o avistou sob um ângulo de 60º; a outra estava a 5,5 km da posição vertical do balão, alinhada com a primeira, e no mesmo sentido, conforme se vê na figura, e o avistou sob um ângulo de 30º.

Qual a altura aproximada em que se encontrava o balão?

a) 1,8 km
b) 1,9 km
c) 3,1 km
d) 3,7 km
e) 5,5 km

Questão 18 - (ENEM/2010)

As sacolas plásticas sujam florestas, rios e oceanos e quase sempre acabam matando por asfixia peixes, baleias e outros animais aquáticos. No Brasil, em 2007, foram consumidas 18 bilhões de sacolas plásticas. Os supermercados brasileiros se preparam para acabar com as sacolas plásticas até 2016. Observe o gráfico a seguir, em que se considera a origem como o ano de 2007.



LUCENA, M. Guerra às sacolinhas. **Galileu**. n° 225, 2010.

De acordo com as informações, quantos bilhões de sacolas plásticas serão consumidos em 2011?

a) 4,0
b) 6,5
c) 7,0
d) 8,0
e) 10,0

Questão 19 - (ENEM/2010)

O Pantanal é um dos mais valiosos patrimônios naturais do Brasil. É a maior área úmida continental do planeta — com aproximadamente 210 mil km^2, sendo 140 mil km^2 em território brasileiro, cobrindo parte dos estados de Mato Grosso e Mato Grosso do Sul. As chuvas fortes são comuns nessa região. O equilíbrio desse ecossistema depende, basicamente, do luxo de entrada e saída de enchentes. As cheias chegam a cobrir até $\frac{2}{3}$ da área pantaneira.

Disponível em: http://www.wwf.org.br. Acesso em: 23 abr. 2010 (adaptado).

Durante o período chuvoso, a área alagada pelas enchentes pode chegar a um valor aproximado de

a) 91,3 mil km^2.
b) 93,3 mil km^2.
c) 140 mil km^2.
d) 152,1 mil km^2.
e) 233,3 mil km^2.

Questão 20 - (ENEM/2010)

Para dificultar o trabalho de falsificadores, foi lançada uma nova família de cédulas do real. Com tamanho variável – quanto maior o valor, maior a nota – o dinheiro novo terá vários elementos de segurança. A estreia será entre abril e maio, quando começam a circular as notas de R$ 50,00 e R$ 100,00.
As cédulas atuais têm 14 cm de comprimento e 6,5 cm de largura. A maior cédula será a de R$ 100,00, com 1,6 cm a mais no comprimento e 0,5 cm maior na largura.

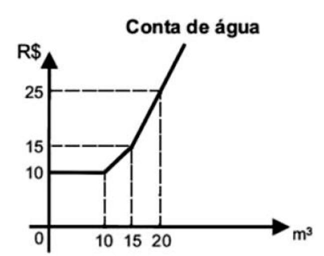
Disponível em: http://br.noticias.yahoo.com. Acesso em: 20 abr. 2010 (adaptado).

Quais serão as dimensões da nova nota de R$ 100,00?

a) 15,6 cm de comprimento e 6 cm de largura.
b) 15,6 cm de comprimento e 6,5 cm de largura.
c) 15,6 cm de comprimento e 7 cm de largura.
d) 15,9 cm de comprimento e 6,5 cm de largura.
e) 15,9 cm de comprimento e 7 cm de largura.

Questão 21 - (ENEM/2010)

Certo município brasileiro cobra a conta de água de seus habitantes de acordo com o gráfico. O valor a ser pago depende do consumo mensal em m^3.



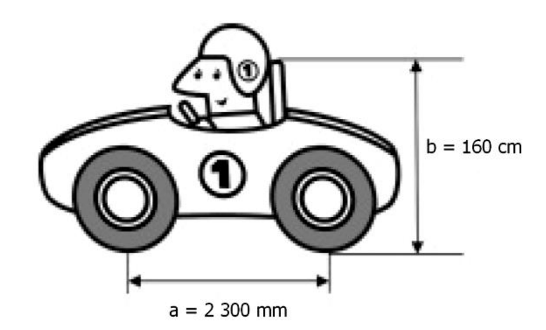
Se um morador pagar uma conta de R$ 19,00, isso significa que ele consumiu

a) 16 m^3 de água.
b) 17 m^3 de água.
c) 18 m^3 de água.
d) 19 m^3 de água.
e) 20 m^3 de água.

Questão 22 - (ENEM/2011)

Um mecânico de uma equipe de corrida necessita que as seguintes medidas realizadas em um carro sejam obtidas em metros:

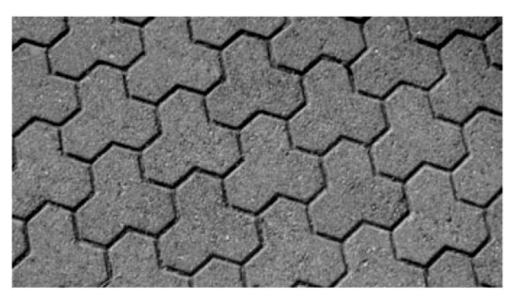
a) distância **a** entre os eixos dianteiro e traseiro;
b) altura **b** entre o solo e o encosto do piloto.



Ao optar pelas medidas **a** e **b** em metros, obtêm-se, respectivamente,

a) 0,23 e 0,16.
b) 2,3 e 1,6.
c) 23 e 16.
d) 230 e 160.
e) 2 300 e 1 600.

Questão 23 - (ENEM/2011)



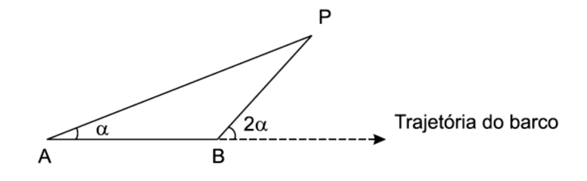
Disponível em: http://www.diaadia.pr.gov.br. Acesso em: 28 abr. 2010.

O polígono que dá forma a essa calçada é invariante por rotações, em torno de seu centro, de

a) 45°.
b) 60°.
c) 90º
d) 120°.
e) 180°.

Questão 24 - (ENEM/2011)

Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto A, mediu o ângulo visual α fazendo mira em um ponto fixo P da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até um ponto B de modo que fosse possível ver o mesmo ponto P da praia, no entanto sob um ângulo visual 2α. A figura ilustra essa situação:

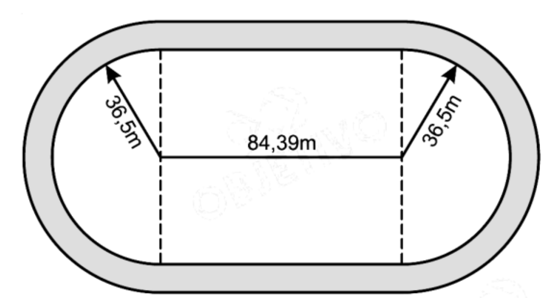


Suponha que o navegante tenha medido o ângulo α = 30º e, ao chegar ao ponto B, verificou que o barco havia percorrido a distância AB = 2 000 m. Com base nesses dados e mantendo a mesma trajetória, a menor distância do barco até o ponto fixo P será

a) 1 000 m.
b) $1\,000\sqrt{3}$ m.
c) $2\,000\frac{\sqrt{3}}{3}$ m.
d) 2 000 m.
e) $2\,000\sqrt{3}$ m.

Questão 25 - (ENEM/2011)

O atletismo é um dos esportes que mais se identificam com o espírito olímpico. A figura ilustra uma pista de atletismo. A pista é composta por oito raias e tem largura de 9,76 m. As raias são numeradas do centro da pista para a extremidade e são construídas de segmentos de retas paralelas e arcos de circunferência. Os dois semicírculos da pista são iguais.



BIEMBENGUT, M. S. **Modelação Matemática como método de ensino-aprendizagem de Matemática em cursos de 1.° e 2.° graus**. 1900. Dissertação de Mestrado. IGCE/UNESP, Rio Claro, 1990 (adaptado).

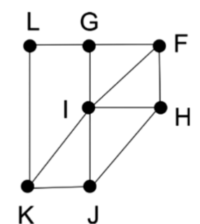
Se os atletas partissem do mesmo ponto, dando uma volta completa, em qual das raias o corredor estaria sendo beneficiado?

a) 1
b) 4
c) 5
d) 7
e) 8

Questão 26 - (ENEM/2011)

Um técnico em refrigeração precisa revisar todos os pontos de saída de ar de um escritório com várias salas.

Na imagem apresentada, cada ponto indicado por uma letra é a saída do ar, e os segmentos são as tubulações.

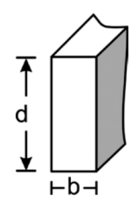


Iniciando a revisão pelo ponto K e terminando em F, sem passar mais de uma vez por cada ponto, o caminho será passando pelos pontos

a) K, I e F.
b) K, J, I, G, L e F.
c) K, L, G, I, J, H e F.
d) K, J, H, I, G, L e F.
e) K, L, G, I, H, J e F.

Questão 27- (ENEM/2011)

A resistência das vigas de dado comprimento é diretamente proporcional à largura (*b*) e ao quadrado da altura (*d*), conforme a figura. A constante de proporcionalidade *k* varia de acordo com o material utilizado na sua construção.

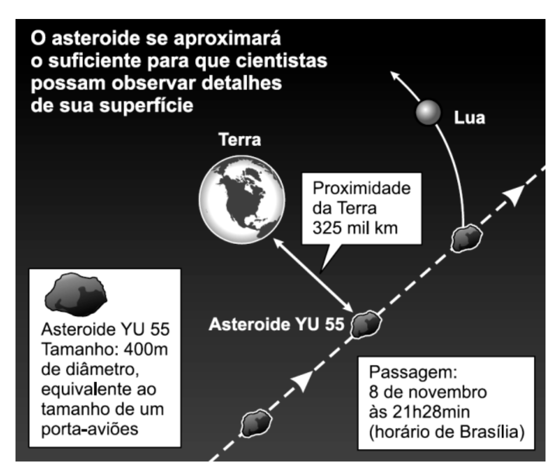


Considerando-se *S* como a resistência, a representação algébrica que exprime essa relação é

a) $S = k.b.d$
b) $S = b.d^2$
c) $S = k.b.d^2$
d) $S = \frac{k.b}{d^2}$
e) $S = \frac{k.d^2}{b}$

Questão 28 - (ENEM/2012)

A Agência Espacial Norte Americana (NASA) informou que o asteroide YU 55 cruzou o espaço entre a Terra e a Lua no mês de novembro de 2011. A ilustração a seguir sugere que o asteroide percorreu sua trajetória no mesmo plano que contém a órbita descrita pela Lua em torno da Terra. Na figura, está indicada a proximidade do asteroide em relação à Terra, ou seja, a menor distância que ele passou da superfície terrestre.



Fonte: NASA

Disponível em: http://noticias.terra.com.br (adaptado).

Com base nessas informações, a menor distância que o asteroide YU 55 passou da superfície da Terra é igual a

a) $3,25 \times 10^2$ km.
b) $3,25 \times 10^3$ km.
c) $3,25 \times 10^4$ km.
d) $3,25 \times 10^5$ km.
e) $3,25 \times 10^6$ km.

Questão 29 - (ENEM/2012)

O losango representado na Figura 1 for formado pela união dos centros das quatro circunferências tangentes, de raios de mesma medida.

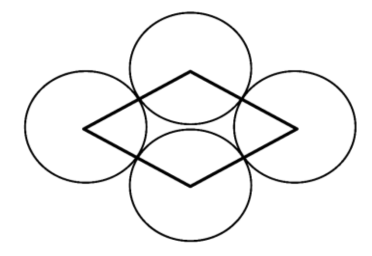


Figura 1

Dobrando-se o raio de duas das circunferências centradas em vértices opostos do losango e ainda mantendo-se a configuração das tangências, obtêm-se uma situação conforme ilustrada pela Figura 2.

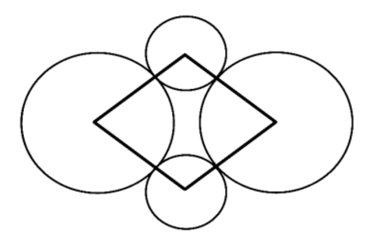


Figura 2

O perímetro do losango da Figura 2, quando comparado ao perímetro do losango da Figura 1, teve um aumento de

a) 300%.
b) 200%.
c) 150%.
d) 100%.
e) 50%.

Questão 30 - (ENEM/2012)

A capacidade mínima, em BTU/h, de um aparelho de ar-condicionado, para ambientes sem exposição ao sol, pode ser determinada da seguinte forma:

- 600 BTU/h por m^2, considerando-se até duas pessoas no ambiente;
- para cada pessoa adicional nesse ambiente, acrescentar 600 BTU/h;
- acrescentar mais 600 BTU/h para cada equipamento eletrônico em funcionamento no ambiente.

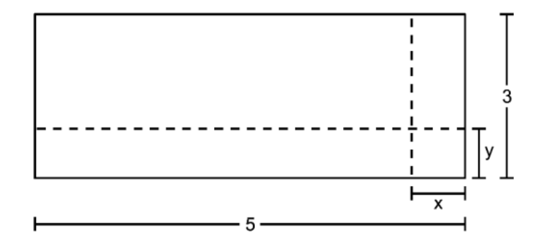
Será instalado um aparelho de ar-condicionado em uma sala sem exposição ao sol, de dimensões 4 m x 5 m, em que permaneçam quatro pessoas e possua um aparelho de televisão em funcionamento.

A capacidade mínima, em BTU/h, desse aparelho de ar-condicionado deve ser

a) 12 000.
b) 12 600.
c) 13 200.
d) 13 800.
e) 15 000.

Questão 31 - (ENEM/2012)

Um forro retangular de tecido traz em sua etiqueta a informação de que encolherá após a primeira lavagem mantendo, entretanto, seu formato. A figura a seguir mostra as medidas originais do forro e o tamanho do encolhimento (x) no comprimento e (y) na largura. A expressão algébrica que representa a área do forro após ser lavado é (5 – x) (3 – y).

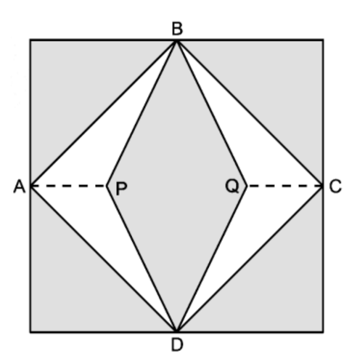


Nessas condições, a área perdida do forro, após a primeira lavagem, será expressa por:

a) 2xy
b) 15 – 3x
c) 15 – 5y
d) –5y – 3x
e) 5y + 3x – xy

Questão 32 - (ENEM/2012)

Para decorar a fachada de um edifício, um arquiteto projetou a colocação de vitrais compostos de quadrados de lado medindo 1 m, conforme a figura a seguir.



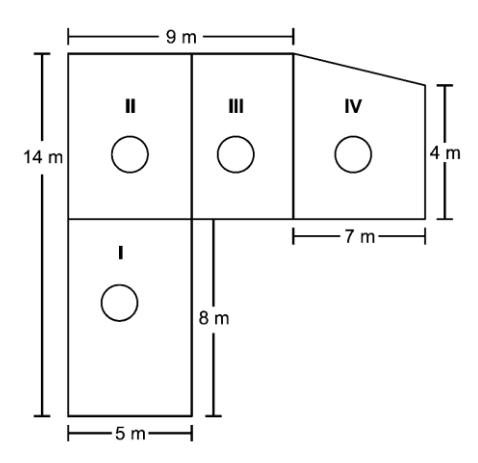
Nesta figura, os pontos A, B, C e D são pontos médios dos lados do quadrado e os segmentos AP e QC medem 1/4 da medida do lado do quadrado. Para confeccionar um vitral, são usados dois tipos de materiais: um para a parte sombreada da figura, que custa R$ 30,00 o m^2, e outro para a parte mais clara (regiões ABPDA e BCDQB), que custa R$ 50,00 o m^2.

De acordo com esses dados, qual e o custo dos materiais usados na fabricação de um vitral?

a) R$ 22,50
b) R$ 35,00
c) R$ 40,00
d) R$ 42,50
e) R$ 45,00

Questão33 - (ENEM/2012)

Jorge quer instalar aquecedores no seu salão de beleza para melhorar o conforto dos seus clientes no inverno. Ele estuda a compra de unidades de dois tipos de aquecedores: modelo A, que consome 600 g/h (gramas por hora) de gás propano e cobre 35 m^2 de área, ou modelo B, que consome 750 g/h de gás propano e cobre 45 m^2 de área. O fabricante indica que o aquecedor deve ser instalado em um ambiente com área menor do que a da sua cobertura. Jorge vai instalar uma unidade por ambiente e quer gastar o mínimo possível com gás. A área do salão que deve ser climatizada encontra-se na planta seguinte (ambientes representados por três retângulos e um trapézio).



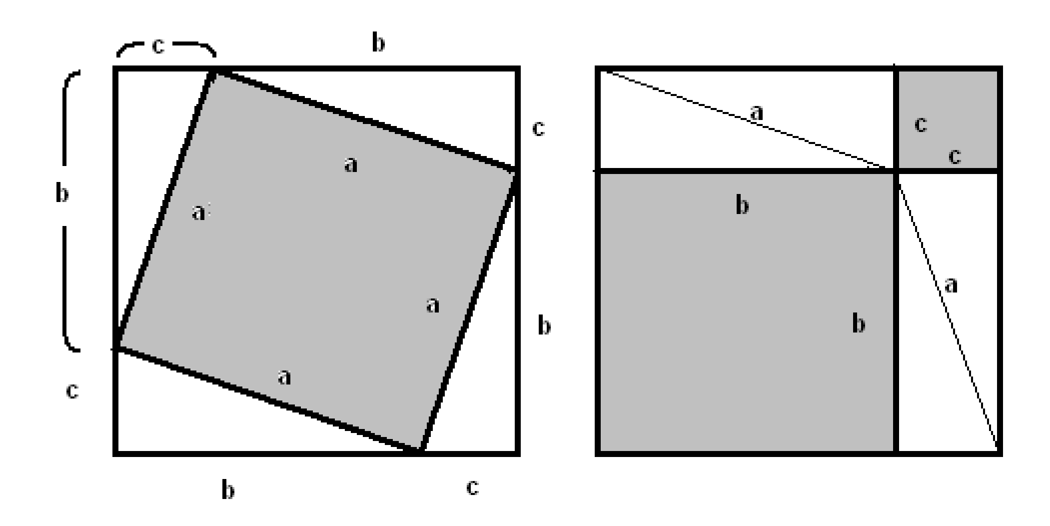
Avaliando-se todas as informações, serão necessários

a) quatro unidades do tipo A e nenhuma unidade do tipo B.
b) três unidades do tipo A e uma unidade do tipo B.
c) duas unidades do tipo A e duas unidades do tipo B.
d) uma unidade do tipo A e três unidades do tipo B.
e) nenhuma unidade do tipo A e quatro unidades do tipo B.

GABARITO

1)C
2)C
3)C
4)E
5)D
6)A
7)C
8)
9)E
10)A
11)D
12)B
13)D
14)A
15)B
16)E
17)D
18) C
19) E
20)C
21)C
22)B
23)B
24)D
25) B
26)A
26)C
27)C
28)D
29)E
30)D
31)E
32)B
33)C

Geometria Espacial

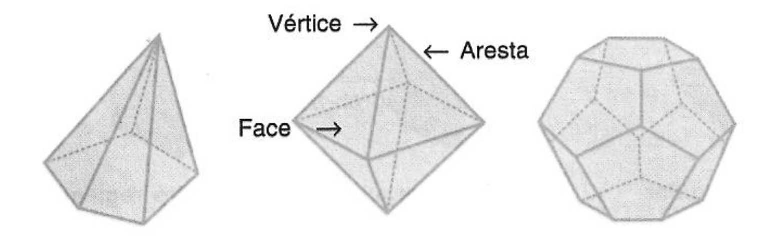


$$a^2 = b^2 + c^2$$

Geometria Espacial

1) Poliedros convexos

Observe os sólidos abaixo cujas faces são polígonos convexos.



Podemos observar que:

a) Cada aresta é comum a duas e somente a duas faces
b) Duas faces nunca estão num mesmo plano
c) O plano de cada face deixa as demais faces no mesmo semi-espaço.

Aos sólidos que satisfazem essas condições chamamos **poliedros convexos.**
Assim, um poliedro possui

- ❖ Faces (são polígonos convexos)
- ❖ Arestas (são os lados do polígono)
- ❖ Vértices (são os vértices do polígono)
- ❖ Superfície (é a união das faces do poliedro)

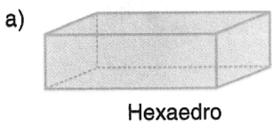
1.1) Classificação

Classificamos um poliedro de acordo com o número de faces. O número mínimo de faces de um poliedro convexo são quatro.

Veja alguns exemplos:

- ❖ Tetraedro : 4 faces
- ❖ Pentaedro : 5 faces
- ❖ Hexaedro : 6 faces
- ❖ Heptaedro : 7 faces
- ❖ Octasedro : 8 faces
- ❖ Decaedro : 10 faces
- ❖ Dodecaedro : 12 faces
- ❖ Icosaedro: 20 faces

a)

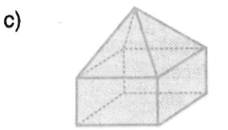


Hexaedro

b)

Octaedro

c)



Eneaedro

1.2) Teorema de Euler

Num poliedro convexo, se V, A e F são os números respectivamente, de vértices, de arestas e de faces, então vale a seguinte relação:

$$\boxed{V - A + F = 2}$$

Veja:

Poliedro convexo	V	A	F	V - A+ F
Hexaedro	8	12	6	8 – 12 – 6 = 2
Heptaedro	10	15	7	10 – 15 + 7 = 2
Decaedro	12	20	10	12 – 20 + 10 = 2
Dodecaedro	20	30	12	20 – 30 +12 = 2

1.3) Poliedros regulares

Um poliedro é regular se, e somente se, forem obedecidas as seguintes condições:

- Todas as suas faces são polígonos regulares e congruentes entre si
- Todos os seus ângulos poliédricos são congruentes entre si.

Exemplos

a) Um poliedro convexo tem 22 arestas. O número de vértices é igual ao número de faces. Calcular o número de vértices desse poliedro

Soluçao:

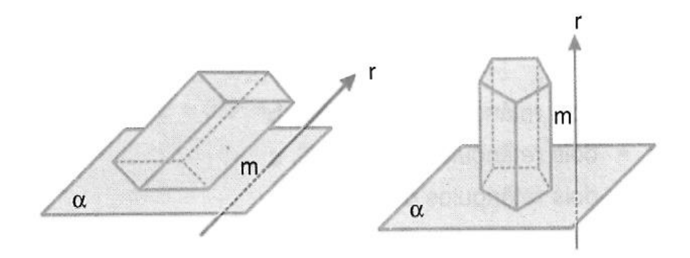
apenas utilizando a formula resolvera o exercício logo V – A + F = 2 como o numero de vértices é igual ao numero de faces temos:

2V – A = 2,
2V = 2 + 22,
V = 12

b) Um poliedro convexo tem cinco faces quadrangulares e duas faces pentagonais. Calcular o número de arestas e o número de vértices.

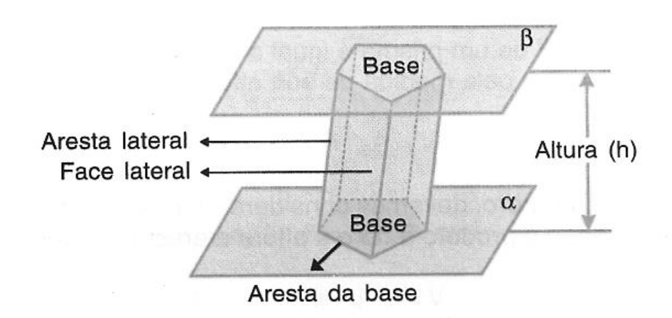
2) Prismas

O prisma é um sólido delimitado por faces planas, conforme verificamos nas figuras seguintes.



2.1) Elementos principais

- **Bases:** formada por polígonos
- **Arestas das bases:** lados das bases
- **Faces laterais:** formadas por paralelogramos
- **Altura :** distância H entre os planos das bases
- **Superfície lateral:** conjunto de todas as faces laterais
- **Superfície total :** união da superfície lateral com as duas bases

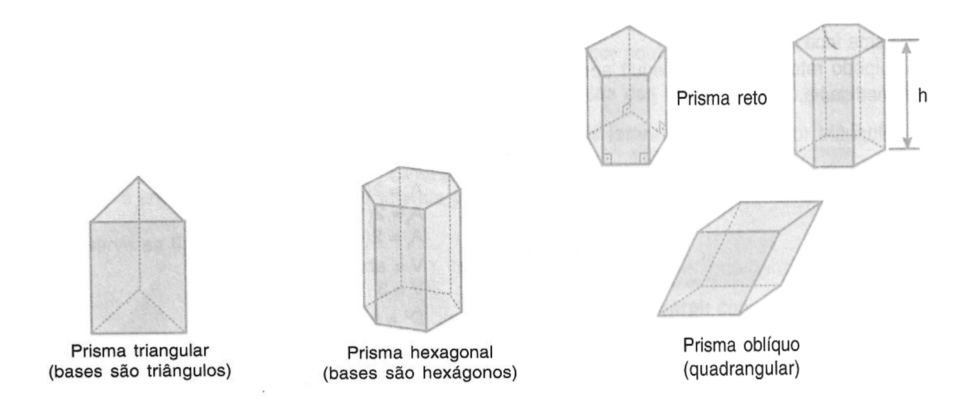


2.2) Classificação:

Podemos classificar um prisma de acordo com o número de lados das duas bases.

- **Prisma triangular**: bases : triângulos
- **Prisma quadrangular** : bases : quadriláteros
- **Prisma pentagonal** : bases: pentágonos
- **Prisma hexagonal**: bases: hexágonos

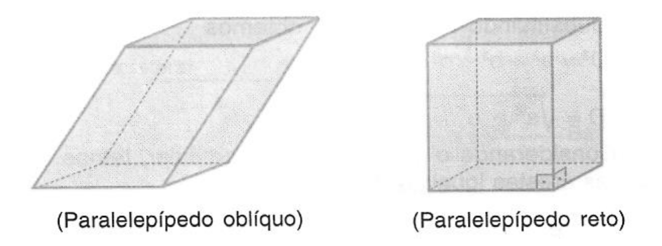
Se as bases são polígonos regulares, o prisma é chamado **regular**.



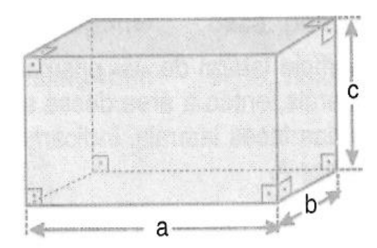
Um prisma é **reto** se as arestas laterais forem perpendiculares às bases; caso contrário, o prisma é dito **oblíquo** .

2.3) Paralelepípedos

Denomina-se paralelepípedo o prisma no qual as seis faces são perpendiculares.

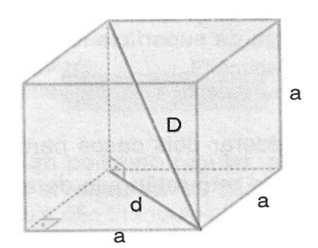


As dimensões são chamadas **comprimento, largura e altura**, cujas medidas são indicadas por **a, b e c**, respectivamente.



2.4) Cubo

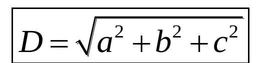
É um paralelepípedo cujas arestas são congruentes entre si. O cubo é também chamado hexaedro regular.



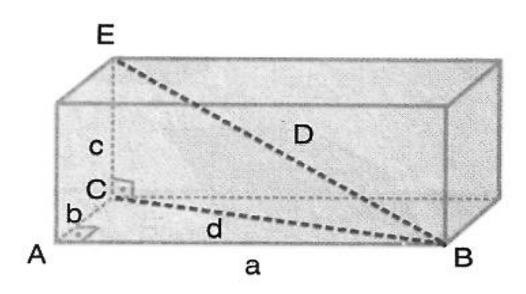
2.5) Diagonal

Chamamos diagonal D de um prisma todo segmento de reta cujas extremidades são vértices que não pertencem a uma mesma face desse prisma.

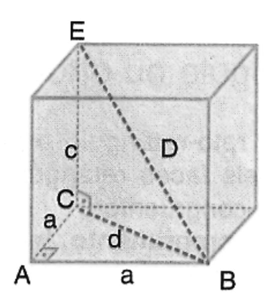
O paralelepípedo a seguir apresenta as arestas de medidas a, b, e c.



$$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$



Considerando o cubo um caso particular, temos todas as arestas iguais e de medida **a.**



$$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\Downarrow$$

$$D = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{D = a\sqrt{3}}$$

2.6) Áreas

Como a superfície lateral de um prisma é a reunião de suas faces laterais, então a área dessa superfície é a soma das áreas das faces laterais, indicamos a área da superfície lateral por A_L .

A_L = soma das áreas das faces laterais
A_L = 2pH, onde 2p é o perímetro da base e H é a altura do prisma.

Observação

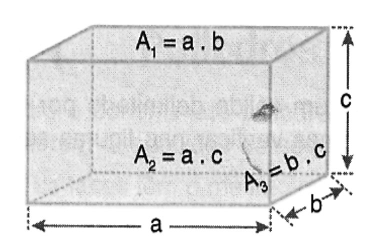
Superfície total de uma prisma é a reunião das suas faces laterais com as suas bases. Indicamos a área da superfície total por A_T .

$$\boxed{A_T = A_L + 2 \cdot A_B}$$

Devemos considerar dois casos particulares:

❖ No paralelepípedo as arestas a, b e c, temos como faces

- Dois retângulos de área : a . b
- Dois retângulos de área : a . c



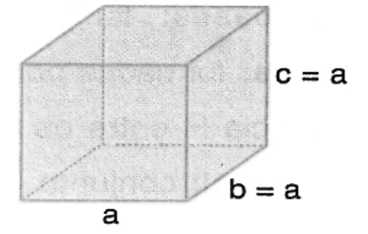
- Dois retângulos de área : b . c

Logo temos

$$A_T = 2(ab + ac + bc)$$

❖ No cubo de aresta de medida a, temos

$$A_T = 2(aa + aa + aa)$$
$$A_T = 2(a^2 + a^2 + a^2)$$
$$\Downarrow$$
$$A_T = 6a^2$$



2.7) Volume

Todo sólido ocupa uma porção do espaço. Essa porção é o volume desse sólido.
O volume V de um prisma é igual ao produto da área de sua base A_B pela medida da sua altura **H**.

$$V = A_B.H$$

❖ Para um paralelepípedo, devemos considerar a área da base como sendo o produto a . b e a altura a aresta c. Logo

$$V = a.b.c$$

❖ No caso de uma cubo, as arestas de medida a, o volume é

$$V = a^3$$

Exemplos:

1) Determinar a área total, o volume e a diagonal do paralelepípedo de dimensões 3cm, 4 cm e 5 cm.

2) O volume de um cubo mede 27 cm^3. Calcule.

a) sua área total

b) sua diagonal da face

c) sua diagonal

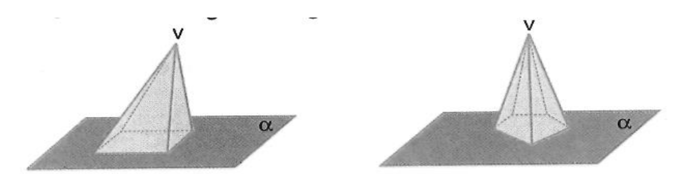
3) Um prisma regular triangular tem arestas laterais de 6 cm e arestas de base de 4 cm. Obter:

a) O seu volume
b) A sua área lateral
c) A sua área total

3) Pirâmide

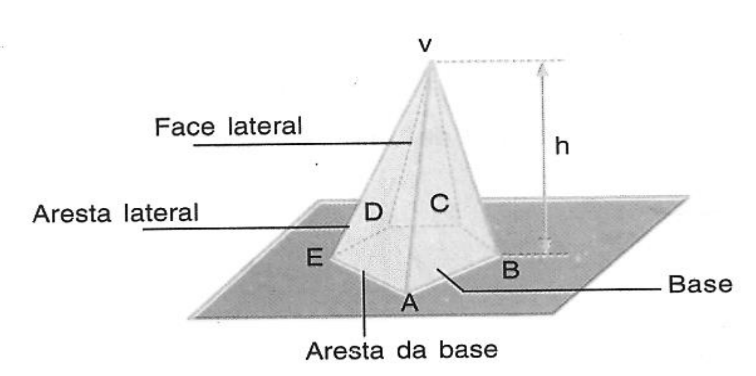
A pirâmide é um sólido delimitado por faces planas. Sua base é um polígono e suas faces laterais são triângulos.

Observe as figuras seguintes:



3.1) Elementos principais

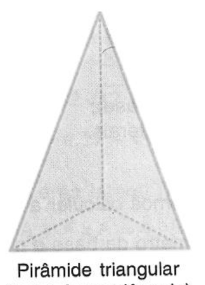
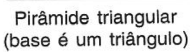
- **Base:** formada por polígono
- **Vértice:** ponto V
- **Arestas da Base** : lados do polígono da base
- **Faces laterais** : formada por triângulos
- **Arestas laterais:** lados dos triângulos das faces laterais, com exceção dos lados do polígono da base
- **Altura:** distância H do ponto V ao plano da base
- **Superfície lateral:** conjunto de todas as faces
- **Superfície total** : união da superfície lateral com a base



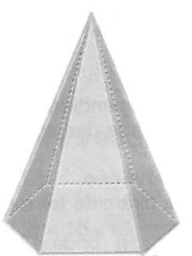
3.2) Classificação

Podemos classificar uma pirâmide de acordo com o tipo de polígono que constitui a sua base.

- **Pirâmide triangular**: base triângulo
- **Pirâmide quadrangular**: base quadrilátero
- **Pirâmide pentagonal** : base : pentágono
- **Pirâmide hexagonal** : base : hexágono

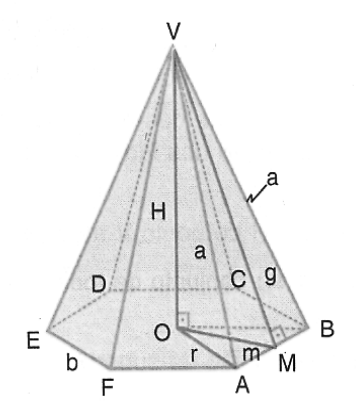
Pirâmide triangular
(base é um triângulo)



Pirâmide hexagonal
(base é um hexágono)

Se a base é um polígono regular, a pirâmide é chamada regular. As arestas laterais são congruentes entre si e as faces laterais são triângulos isósceles congruentes entre si.

3.3) Dimensões lineares da pirâmide



Na figura a seguir, temos uns pirâmide regular, na qual vamos destacar alguns segmentos importantes. A medida de cada um estará sendo representada por uma letra.

- Aresta da base (b)
- Apótema da base (m)
- Raio da base (r)
- Altura (h)
- Aresta lateral (a)
- Apótema da pirâmide (g)

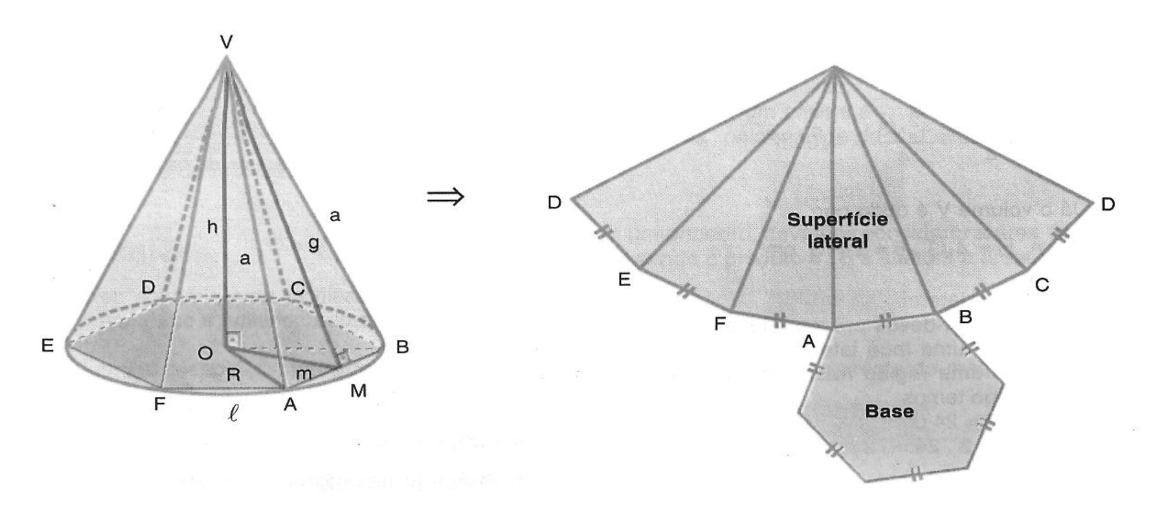
Chama-se apótema de uma pirâmide regular cada uma das alturas de suas faces laterais, relativas às arestas da base.

Os triângulos VOM, VOB e VMB são retângulos. Aplicando-se o teorema de Pitágoras, obtemos algumas relações importantes entre as dimensões lineares citadas anteriormente. Vejamos:

- No triângulo VOM : $g^2 = H^2 + m^2$
- No triângulo VOB : $a^2 = H^2 + r^2$
- No triângulo VMB : $a^2 = g^2 + (b/2^2$

3.4) Áreas

Superfície Lateral é a reunião das faces laterais. Já a **Superfície Total** é a reunião das faces laterais com a base.



Indicando por A_B, A_L e A_T, respectivamente, as áreas da base, da superfície lateral e da superfície total de uma pirâmide, temos:

$$A_T = A_B + A_L$$

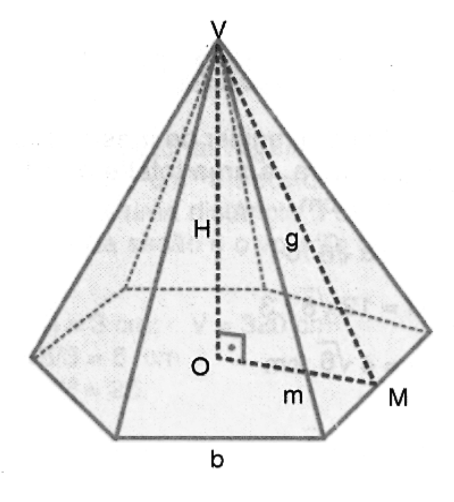
A_B = (dependerá do polígono da base)

A_L = soma das áreas das faces laterais

3.5) Volume :

O volume de uma pirâmide é a terça parte do volume de um prisma de base e altura iguais às da pirâmide. Assim temos :

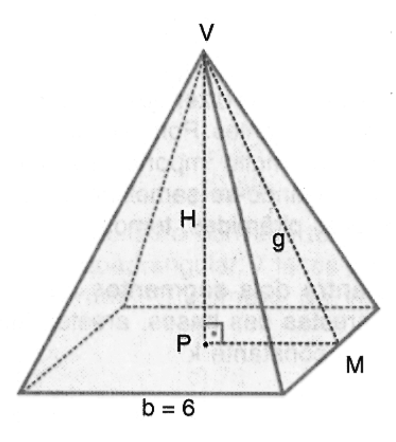
$$V = \frac{A_B \cdot H}{3}$$



Exemplo:

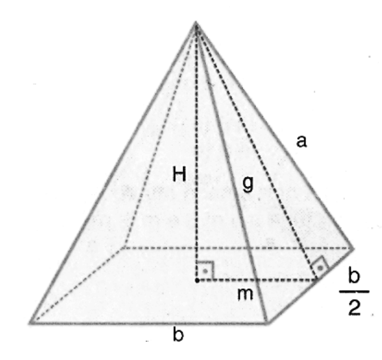
1) Determinar o volume, a área lateral e a área total de uma pirâmide hexagonal regular cujo apótema da base mede $\sqrt{3}$ cm e o apótema da pirâmide mede 6 cm.

2) Uma pirâmide quadrangular regular de altura 4 cm tem aresta da base medindo 6 cm. Determinar:
   a) O seu volume
   b) O seu apótema
   c) A sua área total



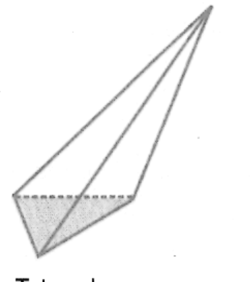
3) Numa pirâmide regular de base quadrada, a área da base é 16cm^2 e a altura mede 8 cm. Determinar:

   a) A aresta da base
   b) O apótema da base
   c) O apótema da pirâmide
   d) A aresta lateral
   e) A área lateral
   f) A área total
   g) O volume



3.6) Tetraedro Regular

Chama-se tetraedro regular o tetraedro que possui as seis arestas congruentes entre si. Nesse caso, todas as faces são triângulos equiláteros. O tetraedro é uma pirâmide triangular.



Tetraedro

Tetraedro regular

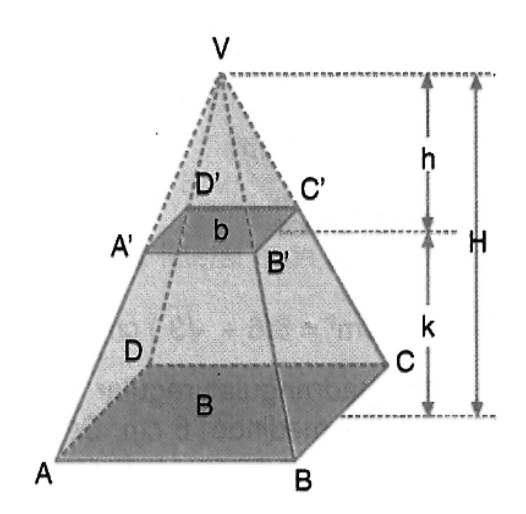
Para o cálculo da área total, da altura e do volume de um tetraedro regular, utilizamos

$$A_T = a^2\sqrt{3} \qquad H = \frac{a\sqrt{6}}{3} \qquad V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

Exemplo:

1) Dado um tetraedro regular de aresta 12 cm, calcular a medida H da altura, a área total e o volume.

3.7) Tronco de pirâmide



Dada uma pirâmide e uma seção transversal qualquer paralela à base, chama-se tronco de pirâmide a região entre a base e essa seção transversal.

Nesse caso, podemos dizer que as pirâmides VABCD e VA'B'C'D' são semelhantes. Portanto ocorrem, entre seus elementos, relações muito importantes, que podem ser demonstradas utilizando semelhança de triângulos.

Logo, nas duas pirâmides, temos:

- A razão entre dois segmentos correspondentes (alturas, arestas das bases, arestas laterais,...) é igual a uma constante k.

$$k = \frac{H}{h} = \frac{VA}{VA'} = \frac{AB}{A'B'}$$

- A razão entre duas áreas correspondentes (áreas das bases, áreas laterais, áreas totais) é igual a k^2.

$$k^2 = \frac{A_{\Delta ABCD}}{A_{\Delta A'B'C'D'}}$$

- A razão entre seus volumes é igual a k^3

$$k^3 = \frac{V_{\Delta ABCD}}{V_{\Delta A'B'C'D'}}$$

Exemplo:

1) Uma pirâmide hexagonal regular de altura 15 cm e volume igual a 320 cm^3 é seccionada por um plano paralelo à base, a uma distância 3 cm do vértice. Determinar a área da seção e o volume do tronco obtido.

4) Cilindro

4.1) Classificação e elementos

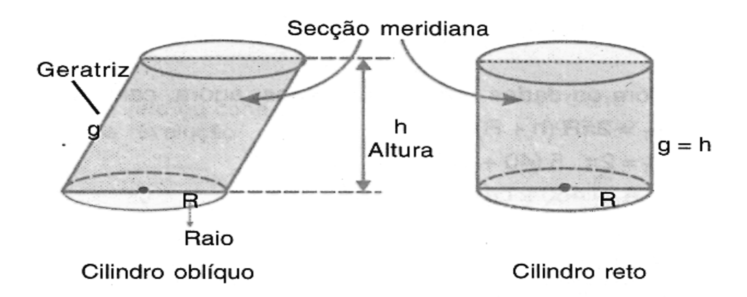
Um cilindro pode ser classificado em:

- **Cilindro reto**

Quando as geratrizes são perpendiculares às bases. Nesse caso, a secção meridiana é um retângulo. Num cilindro reto, a geratriz e a altura são iguais (g = h)

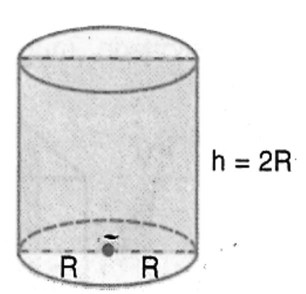
- **Cilindro oblíquo**

Quando as geratrizes são obliquas às bases. Nesse caso, a secção meridiana é um paralelogramo.



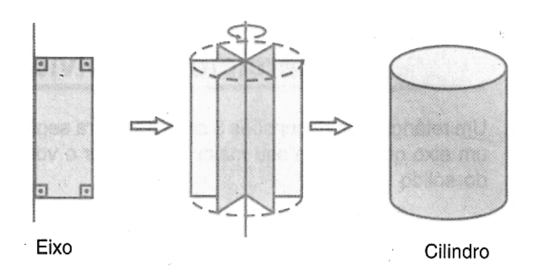
- **Cilindro equilátero**

Se a altura do cilindro for igual ao diâmetro da base, ou seja, h = 2R, então a secção meridiana é um quadrado e o cilindro recebe o nome de cilindro equilátero.



Observação:
O cilindro também recebe o nome de cilindro de revolução, porque pode ser pensado como um retângulo que gira em torno de um dos seus lados.

Veja a figura a seguir:



4.2) Área da base, área lateral, área total e volume do cilindro reto

Consideremos um cilindro de raio R e altura h.

4.2.1) Área da base

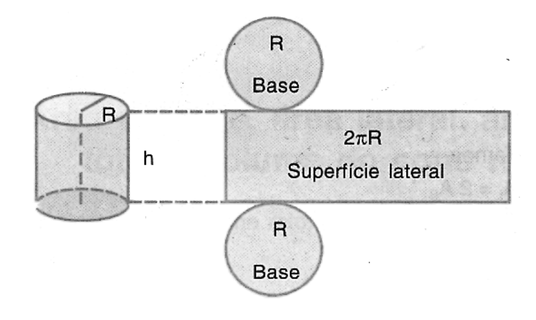
A área da base de um cilindro reto é um círculo cuja área é definida por :

$$\boxed{A_B = \pi r^2}$$

4.2.2) Área lateral

A área lateral do cilindro é a reunião de todas as suas geratrizes.

Desenvolvendo-se a superfície lateral, obtém-se um retângulo cuja base mede $2\pi r$, e cuja altura é h. assim,



$$\boxed{A_L = \text{base x altura} = 2\pi rh}$$

4.2.3) Área total

A área total do cilindro é dada por

$$A_T = A_L + 2A_B$$

$$\Downarrow$$

$$A_T = 2\pi Rh + 2\pi R^2$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{A_T = 2\pi R(h+R)}$$

4.2.4) Volume

O volume do cilindro reto é dado pelo produto da área da base pela altura ou pela geratriz.

$$V = A_B \cdot h = \pi R^2 \cdot h$$

$$\boxed{V = \pi R^2 \cdot h}$$

Exemplo :

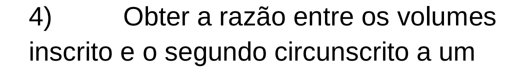
1) Um retângulo de dimensões 3 cm e 6 cm gira segundo um eixo que contém seu maior lado. Obter o volume do solido gerado.

2) Num cilindro circular reto, a área lateral é o dobro da área da base, e sua altura é igual a 5 cm. Obter a área de sua secção meridiana.

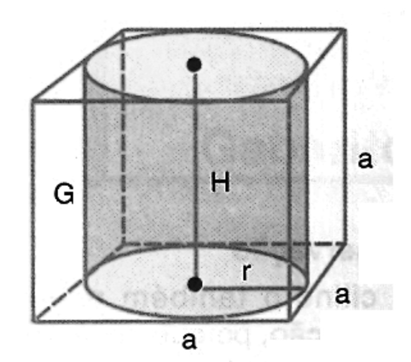


3) Um cilindro apresenta o raio da base medindo 5 cm. Ele é seccionado através de um plano paralelo ao seu eixo, a uma distância de 4cm. A secção obtida é um retângulo cuja área mede 240 cm^2 . Obter a área total e o volume desse cilindro. Observar a figura dada. Considerando O o centro da figura, temos : OB = R = 5 cm

4) Obter a razão entre os volumes de dois cilindros: o primeiro inscrito e o segundo circunscrito a um cubo de aresta a.



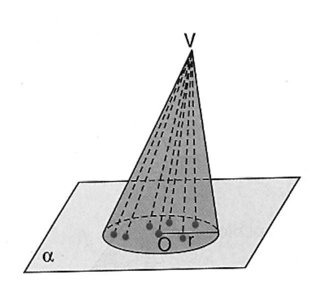
Na figura, temos um cilindro inscrito num cubo de aresta a



5) Cone

5.1) Conceito

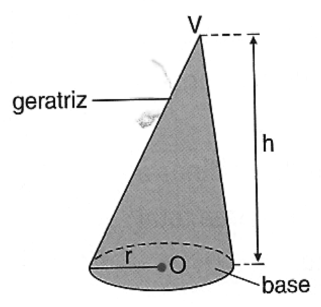
Consideremos um círculo de centro O e raio r, situado num plano α , e um ponto V fora de α . Chama-se cone circular, ou cone, a reunião dos segmentos com uma extremidade em V e a outra em um ponto do círculo.

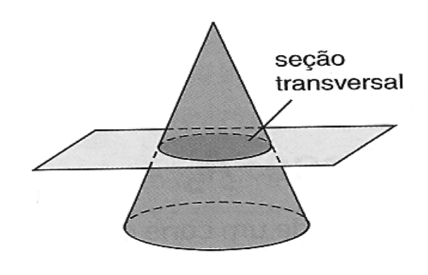


5.2) Elementos

Considerando o cone representado a seguir, temos:

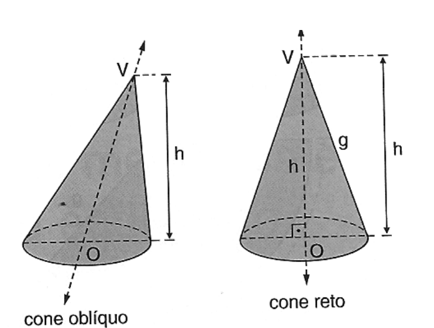
- ✓ O ponto V é o **vértice** do cone:
- ✓ O círculo de raio r é a **base** do cone;
- ✓ Os segmentos com um extremidade em V e a outra nos pontos da circunferência da base são as **geratrizes** do cone;
- ✓ A distância do vértice ao plano da base é a **altura** do cone
- ✓ Secção transversal de um cone é qualquer interseção não vazia do cone com um plano paralelo à base (desde que este não passe pelo vértice); trata-se de um círculo.





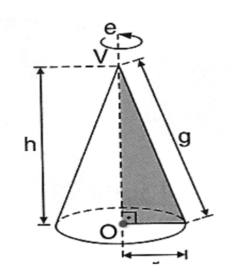
5.3) Classificação

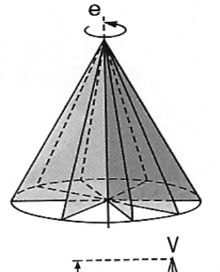
Um cone pode ser classificado conforme a inclinação da reta VO sendo O o centro da base, em relação ao plano da base:



- ✓ O cone circular é obliquo quando a reta VO é oblíqua à base;
- ✓ O cone circular é reto quando a reta VO é perpendicular à base

> **Observação**
> O cone circular reto é também chamado cone de revolução . Ele gerado pela rotação de um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos.
> No cone de revolução a reta VO é o eixo, e vale a relação
> $$r^2 + h^2 = g^2$$

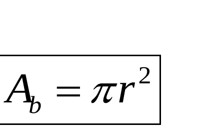




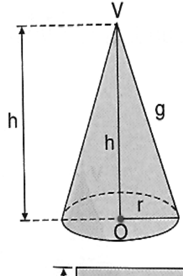
5.4) Áreas

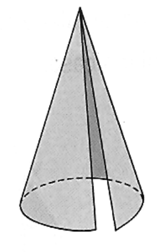
5.4.1) Área da base

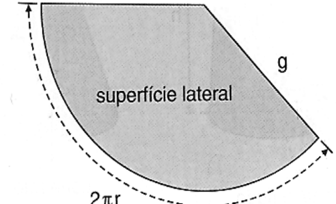
A área da base de um cone é a área de um círculo de raio r.



$$A_b = \pi r^2$$





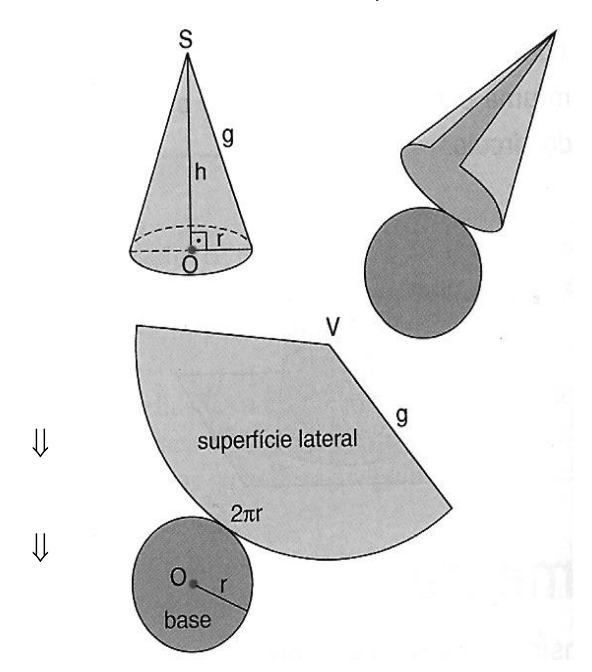


5.4.2) Área Lateral : A_l

A planificação da superfície lateral (ou a reunião das geratrizes) de um cone nos dá um setor circular com as seguintes características:

- ✓ Raio : g (geratriz do cone)
- ✓ Comprimento do arco : $2\pi r$ (perímetro da base)

A área lateral do cone é dada por:



$$A_l = \pi r g$$

5.4.3) Área total: A_t

A superfície total de um cone é a reunião da superfície lateral com o círculo da base. A área dessa superfície é chamada área total.

$$A_t = A_l + A_b$$

$$A_t = \pi r g + \pi r^2$$

$$A_t = \pi r (g + r)$$

Exemplos:

1) O raio de um setor circular de 150°, em papel, mede 10 cm; o setor vai ser utilizado na confecção de um cone. Vamos determina a área lateral e a área total desse cone.

5.5) Volume:

O volume de um cone vale um terço do produto da área da base pela altura:

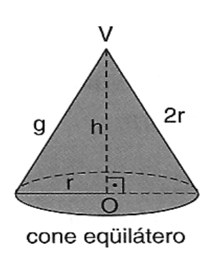
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Exemplo:

2) Seja um cone reto de geratriz de 10 cm e altura de 8 cm. Vamos determinar o seu volume.

5.6) Seção meridiana e cone equilátero

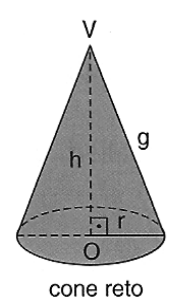
Seção meridiana de um cone é a intersecção dele com um plano que contém o eixo. A seção meridiana de um cone reto é um triângulo equilátero.



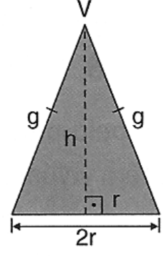
cone eqüilátero



seção meridiana



cone reto

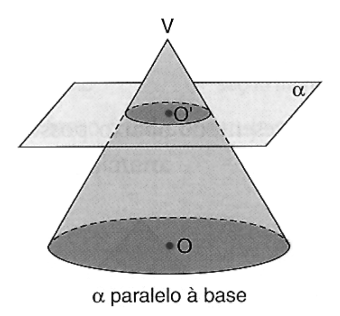


seção meridiana

Cone equilátero é um cone cuja seção meridiana é um triângulo equilátero.

5.7) Tronco de cone

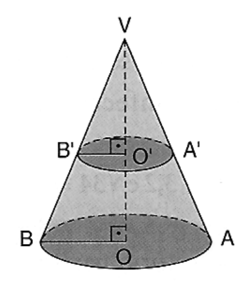
Tronco de cone de bases paralelas é a reunião da base de um cone com uma seção transversal e com o conjunto dos pontos do cone compreendidos entre os planos da base e da seção transversal.

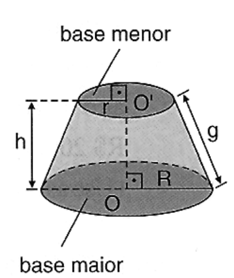


α paralelo à base

5.7.1) Elementos

- ✓ A base do cone é a base maior do tronco, e a seção transversal é a base menor.
- ✓ A distância entre os planos das bases é a altura do tronco.





5.7.2) Áreas

Áreas das bases: A_B, A_b

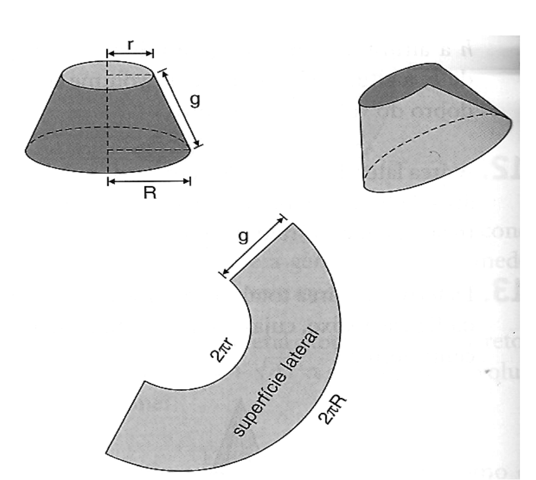
A área da Base maior é a área de um círculo de raio R. Logo:

$$\boxed{A_B = \pi R^2}$$

A área da base menor é a área de outro círculo, de raio r. Logo:

$$\boxed{A_b = \pi r^2}$$

Área lateral : A superfície lateral de um tronco de cone reto de raios r e R e geratrizes g é equivalente a um trapézio de bases $2\pi r$ e $2\pi R$ e altura g. Logo:

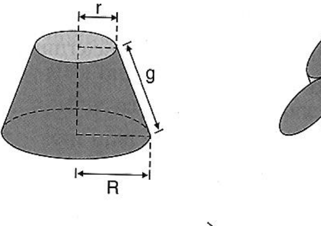


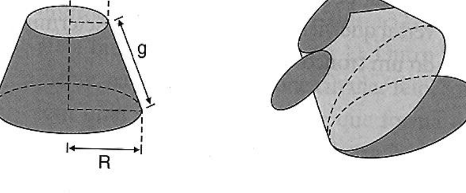
$$A_l = \pi(R+r)g$$

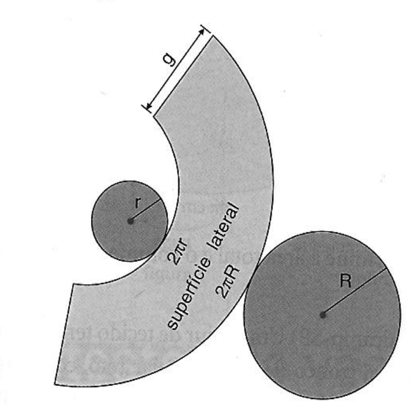
Área total : A_t

A área de um tronco de cone é a soma da área lateral com a área da base maior e com a área da base menor:

$$A_t = A_l + A_B + A_b$$







5.7.3) Volume

O volume de um tronco de cone de bases paralelas é obtido pela diferença dos volumes de dois cones. Logo:

$$V = \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right)$$

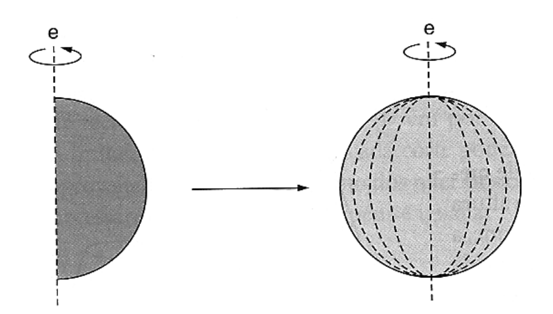
Exemplo :

3) Calcular a área lateral, a área total, o volume de um tronco de cone reto de bases paralelas, cuja geratriz mede 7 cm, e os raios das bases medem 3 cm e 5 cm.

6) Esfera

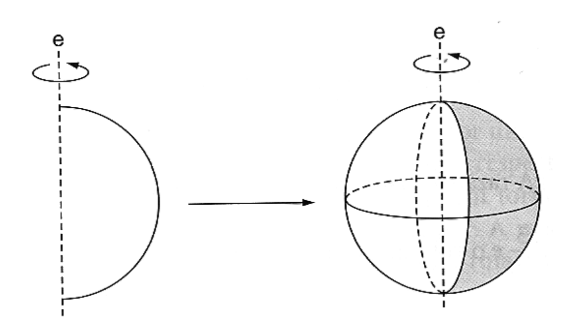
6.1) Conceitos

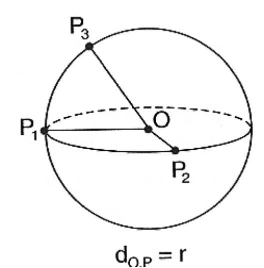
A esfera é o sólido de revolução gerado pela rotação completa de um semicírculo em torno de um eixo que contém um diâmetro.



6.2) Superfície esférica

Superfície esférica de centro O e raio é o conjunto dos pontos P do espaço que distam r do ponto O.





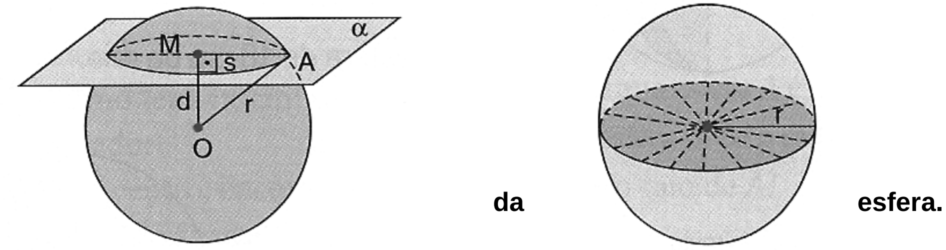
A superfície gerada pela rotação de uma semicircunferência em torno de um eixo que contém o diâmetro é uma superfície esférica.

6.3) Seção da esfera

Toda seção plana de uma esfera é um círculo.
Sendo r o raio da esfera, d a distância do plano secante ao centro e s o raio da seção, vale a relação:

$$\boxed{s^2 + d^2 = r^2}$$

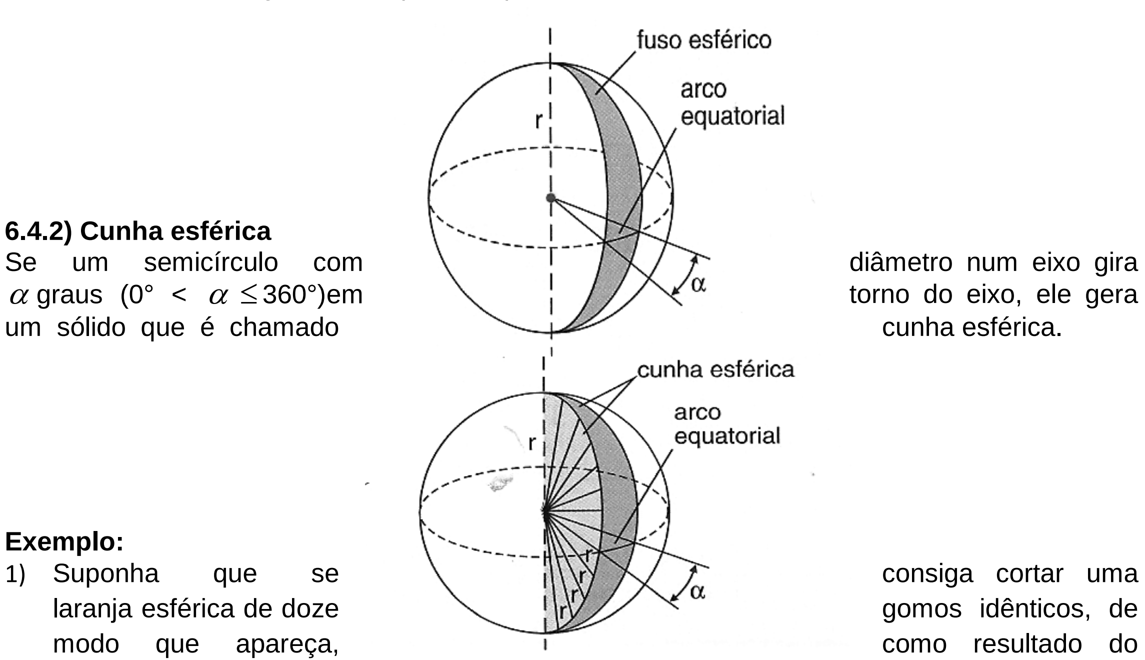
Se o plano secante passa pelo centro da esfera, temos como seção um círculo máximo da esfera.



6.4) Partes da esfera.

6.4.1) Fuso esférico

Se uma semicircunferência com as extremidades num eixo, ela gira α graus (0° < $\alpha \leq$ 360°) em torno do eixo, ela gira uma superfície que é chamada fuso esférico.



6.4.2) Cunha esférica

Se um semicírculo com diâmetro num eixo gira α graus (0° < $\alpha \leq$ 360°)em torno do eixo, ele gera um sólido que é chamado cunha esférica.

Exemplo:

1) Suponha que se consiga cortar uma laranja esférica de doze gomos idênticos, de modo que apareça, como resultado do corte, um gomo completo. Calcule o volume e área da superfície esférica obtida.

6.5) Áreas e volume

6.5.1) Área da superfície esférica

A área de um superfície esférica de raio r é igual a :

$$A = 4\pi r^2$$

6.5.2) Volume da esfera

O volume de uma esfera de raio r é igual a :

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Exemplo :

2) Uma esfera é seccionada por um plano a 8 cm do centro, a seção obtida tem área 36 π cm^2. Determinar a área da superfície da esfera e seu volume.

6.5.3) Área do fuso

- ✓ Para α em graus: $$A_{fuso} = \frac{\pi r^2 \alpha}{90}$$
- ✓ Para α em radianos: $$A_{fuso} = 2r^2\alpha$$

6.5.4) Volume da cunha

- ✓ Para α em graus: $$V_{cunha} = \frac{\pi r^3 \alpha}{270}$$
- ✓ Para α em radianos: $$V_{cunha} = \frac{2r^3\alpha}{3}$$

Exemplo:

3) Calcular a área total e o volume de um cunha esférica de $\frac{\pi}{6}$ radianos, retirada de uma esfera de 10 cm de raio.

SESSÃO LEITURA

Geometria Espacial da Idade Média

Depois de um longo tempo onde os estudos sobre Geometria Espacial ficaram estancados nas teorias da Geometria grega, foi durante o período denominado historicamente de "Renascimento" que ocorreu o resgate ao estudo de toda ciência adormecida até aquele momento. Diversos matemáticas como Leonardo Fibonacci (1170-1240) retomam os estudos sobre Geometria Espacial e em 1220 escreve a "Practica Geometriae", uma coleção sobre Trigonometria e Geometria (abordagem nas teorias de Euclides e um análogo tridimensional do teorema de Pitágoras).
Em 1615 Joannes Kepler (1571-1630) rotula o "Steometria"(stereo-volume/metria-medida) o cálculo de volume. A palavra volume vem de volumen que é a propriedade de um barril (vinho, azeite,etc.) de rolar com facilidade.
No ano de 1637 surge a Geometria Analítica desenvolvida pelo filósofo e matemático francês René Descartes (1596-1650), misturando Álgebra e Geometria ensina a transformar pontos, retas e circunferências em números, demonstrando como fazer contas com as figuras geométricas. Em 1669 o físico Inglês Isaac Newton (1642-1727) desenvolve o cálculo diferencial e integral. Desta forma torna-se possível calcular a área e o volume de qualquer figura geométrica,independente de sua forma. Antes disso os cálculos se limitavam a descoberta de fórmulas diferentes para cada tipo de figura.
Ler mais: http://informatematica.webnode.com.br/news/geometria-espacial/

FIXAÇÃO

1) (UFPA) Um poliedro convexo tem 6 faces e 8 vértices. O número de arestas é:

a) 6 b) 8 c) 10 d) 12

2) (PUC-SP) O número de vértices de um poliedro convexo que possui 12 faces triangulares é:

a) 6 b) 8 c) 10 d) 12

3) (Cesgranrio) Um poliedro convexo é formado por 80 faces triangulares e 12 pentagonais. O numero de vértices do poliedro é:

a) 80 c) 50
b) 60 d) 48

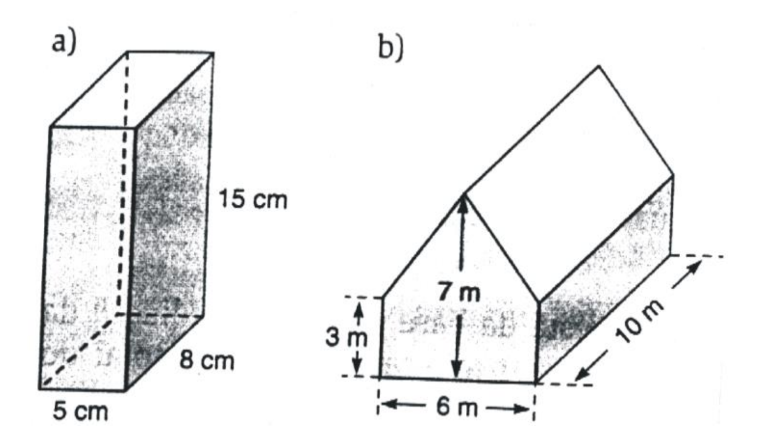
4) (Acafe-SC) Um poliedro convexo tem 15 faces triangulares, 7 faces pentagonais e 2 faces hexagonais. O número de vértices desse poliedro é:

a) 25 c)73
b) 48 d) 96

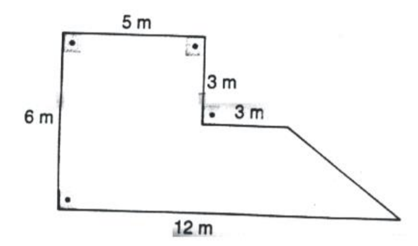
5) (Puccamp-SP) O "cubo octaedro" é um poliedro que possui 6 faces quadrangulares e 8 triangulares. O número de vértices desse poliedro é:

a) 16 c) 12
b) 14 d) 10

6)Calcule a área total dos prismas retos das figuras.



7)Um prisma reto com 1,5 m de altura tem secção transversal como mostra a figura. Determine a área total desse prisma.



8)Um prisma pentagonal regular tem 20 cm de altura. A aresta da base do prisma mede 4 cm. Determine a sua área lateral.

9)Num prisma quadrangular, a aresta da base mede a = 6 m. sabendo que a área lateral do prisma é 261 m², calcule a medida *h* da altura do prisma.

10)Um prisma reto tem por base um triângulo isósceles com medidas 8dm de base e altura 3 dm.

Sabendo que a altura do prisma é igual a 1/3 do perímetro da base, calcule a área da superfície total do prisma.

11)(UFPA) Num prisma regular de base hexagonal a área lateral mede 36 m² e a altura é 3 m. A aresta da base é:

a) 2 m b) 4 m c) 6 m d) 8 m e) 10 m

12)(UFCE) As dimensões de um paralelepípedo retângulo são proporcionais a 3, 5 e 7. Sabendo que a diagonal mede 4 cm, calcule o volume do paralelepípedo.

13)(UFPel-RS) De um reservatório de forma cúbica cheio de água forma retirados 2 litros dessa água. Verificando-se que houve uma variação de 5 cm no nível do liquido, calcule quanto mede a aresta interna da caixa-reservatório.

14)(Unicruz-RS) Se a soma das arestas de um cubo é igual a 72 cm, então o volume do cubo é igual a:

a) 100 cm³
b) 40 cm³
c) 144 cm³
d) 16 cm³
e) 216 cm³

15)(UEPG-PR) As medidas internas de uma caixa d'água em forma de paralelepípedo retângulo são: 1,2 m, 1 m e 0,7 m. Sua capacidade é de:

a) 8 400 litros
b) 84 litros
c) 840 litros
d) 8,4 litros
e) n.d.a

16)O volume do paralelepípedo retângulo cuja diagonal mede 7 cm e duas de suas dimensões medem, respectivamente, 2 cm e 3 cm é

a) 6 cm³
b) 7 cm³
c) 36 cm³
d) 49 cm³

17)(UFMG) As dimensões de um paralelepípedo retângulo são três números inteiros e consecutivos. Se a diagonal desse paralelepípedo retângulo é cm, então seu volume, em cm³, é:

a) 6
b) 24
c) 36
d) 60

18)(Mack) A figura abaixo mostra um reservatório de água, totalmente cheio (medidas em metros). Após terem sido consumidos 12 litros de água, o nível d'água terá abaixado

a) 3 dm
b) 3 cm
c) 17 cm
d) 17 dm

19)(Cesgranrio) Ao congelar-se, a água aumenta de 1/15 o seu volume. O volume de água a congelar, para obter-se um bloco de gelo de 8 dm x 4 dm x 3 dm, é

a) 80 dm³
b) 90 dm³
c) 95 dm³
d) 100 dm³

20)(Fuvest) Um tanque em forma de paralelepípedo retângulo tem por base um retângulo horizontal de lados 0,8 m e 1,2 m. Um individuo, ao mergulhar completamente no tanque, faz o nível da água subir 0,075 m. Então o volume do individuo, em m³, é:

a) 0,066
b) 0,072
c) 0,096
d) 0,600

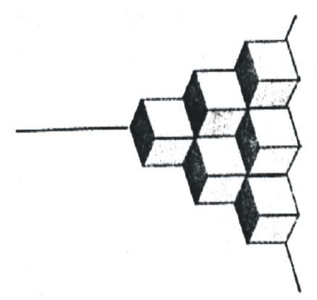
21)(FGV) O acréscimo de volume do paralelepípedo retângulo de aresta de medidas a, b e c, quando aumentamos cada aresta em 10%, é:

a) 30%
b) 33,1%
c) 21%
d) 10%

22)(UFMG) O volume de uma caixa cúbica é 216 litros. A medida de sua diagonal, em centímetros, é:

a) 6
b) 60
c) 60
d) 900

23)(Mack) Na figura, cada cubo tem volume 1. O volume da pilha, incluindo-se os cubos invisíveis no canto, é:



a) 6 b) 8 c) 9 d) 10

24)Um prisma reto de base um hexágono regular de lado 6 cm. Cada face tem área igual a $\sqrt{3}$ vezes a área da base. Sua altura, em cm, é:

a) 15 b) 18 c) 24 d) 27

25)Num prisma regular de base hexagonal, a área lateral mede 36 m^2 e a altura é 3 m. a aresta da base é:

a) 2 m b) 4 m c) 6 cm d) 8 m

26)Dado um prisma hexagonal regular, sabe-se que sua altura mede 3 cm e que sua área lateral é o dobro da área de sua base. O volume deste prisma, em cm^3 , é:

$a)13\sqrt{3}$ d) $27\sqrt{3}$

$b)17\sqrt{3}$ e) $54\sqrt{3}$

27) Se a área da base de um prisma diminui 10 % e a altura aumenta 20%, os seu volume:

a) Aumenta 8%
b) Diminui 10%
c) Aumenta 15%
d) Não se altera

28)Um reservatório tem a forma de um prisma , cuja base reta é um triângulo ABC, retângulo em A. As medidas, em metros, estão indicadas na figura. A capacidade do reservatório, em litros é:

a) 14 000
b) 14 050
c) 14 500
d) 15 000

29) Um prisma de altura h = 1,2 m tem por base um triângulo equilátero de lado 40 cm. O volume desse prisma, medido em litros, é:

$a)96\sqrt{3}$ d) $36\sqrt{3}$

$b)48\sqrt{3}$ e) $24\sqrt{3}$

30)(UFPA) Uma pirâmide regular cuja base é um quadrado de diagonal 6cm e a altura é igual a 2/3 do lado da base tem área total igual a:

a) 288 cm² c) 238 cm²
b) 252 cm² d) 202 cm²

31) O volume de uma pirâmide regular quadrangular VABCD é $27\sqrt{3}$ m³. Se a altura da pirâmide é igual a aresta da base, então a área do triângulo VBD vale, em m²,

Obs.: (B e D são vértices opostos da base ABCD)

a) $\frac{27\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{27\sqrt{2}}{2}$

32)(UFMG) A área total de uma pirâmide regular, de altura 30 mm e base quadrada de lado 80 mm, mede, em mm²,

a) 14 400 c) 56 000
b) 44 000 d) 65 000

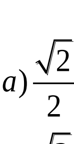
33)(ITA) A área lateral de uma pirâmide quadrangular regular de altura 4 m e de área da base 64 m² vale:

a) 128 m² c) 135 m²
b) $64\sqrt{2}$ m² d) 60 $\sqrt{5}$ m²

34)(UFGO) A base de uma pirâmide é um triangulo eqüilátero, cujo lado mede 4 cm. Sendo a altura da pirâmide igual à altura do triangulo da base, o volume da pirâmide, em cm², é:

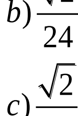
a) 4 b) 6 c) 8 d) 10

35)O volume do tetraedro, conforme a figura, é:



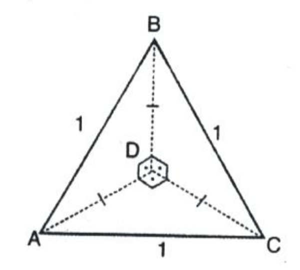
$a)\frac{\sqrt{2}}{2}$

$b)\frac{\sqrt{2}}{24}$



$c)\frac{\sqrt{2}}{6}$

$d)\frac{\sqrt{2}}{3}$



36)(UFPR) O volume de um tetraedro regular de 10 cm de altura é, em cm³,

a) 125 c) 250
b) 125 d) 375

37) Uma pirâmide, que tem por base um quadrado de lado 4 cm, tem 10 cm de altura. A que distância do vértice deve passar um plano paralelo às bases, de modo que a secção transversal tenha uma área de 4 cm²?

a) 2 cm c) 4 cm
b) 3 cm d) 5 cm

38)(PUC-MG) Cortando-se uma pirâmide de 30 dm de altura por um plano paralelo à base e distante 24 dm do vértice, obtém-se uma seção cuja área mede 144 dm². A medida da área da base de tal pirâmide, em dm², é:

a) 225 c) 200
b) 212 d) 180

39) (Fatec) Sejam A1 e A2 duas pirâmides semelhantes. Sabe-se que a área da base de A1 é doze vezes maior que a área da base de A2. Se o volume de A2 é V, então o volume de A1 é:

a) 9 $\sqrt{2}$ V c) 12 $\sqrt{2}$ V
b) 24 $\sqrt{3}$ V d) 12 $\sqrt{3}$ V

40)(UFBA) Uma pirâmide regular cuja base é um quadrado de diagonal medindo 6 $\sqrt{6}$ cm e a medida a altura é igual a $\frac{2}{3}$ da medida do lado da base tem área total igual a:

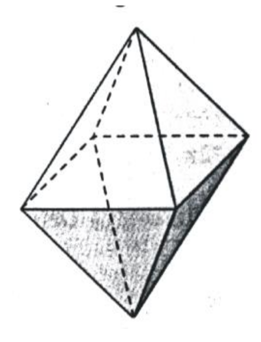
a) 96 $\sqrt{3}$ cm² d) 84 $\sqrt{3}$ cm²
b) 252 cm² e) 576 cm²
c) 288 cm²

41)(UEPG-PR) A aresta lateral e a aresta da base de uma pirâmide quadrangular regular são iguais e medem $\sqrt{2}$ cm . Qual a altura da pirâmide, em cm?

a) $\sqrt{2}$ d) 2 $\sqrt{2}$
b) 4 e) 2
c) 1

42)(PUCC-SP) Um octaedro regular é um poliedro constituído de 8 faces triangulares congruentes entre si e ângulos poliédricos congruentes entre si, conforme mostra figura abaixo.

Se o volume desse poliedro é 72 $\sqrt{2}$ cm³, a medida de sua aresta, em centímetros, é:



a) $\sqrt{2}$ b) 3 $\sqrt{3}$ c) 3 d) 6 $\sqrt{2}$ e) 6 $\sqrt{3}$

43)(PUCC-SP) Uma reta tem altura de 30 cm e base de área *B*. Intercepta-se essa pirâmide por um plano paralelo à sua base, obtendo-se uma outra pirâmide, semelhante à primeira. Se esse plano dista 20 cm da base da pirâmide, a área da base da nova pirâmide é:

$a)\frac{B}{9}$ $b)\frac{2B}{9}$ $c)\frac{4B}{9}$ $d)\frac{B}{3}$ $e)\frac{2B}{3}$

44)(PUC-SP) Um tronco de pirâmide de bases quadradas tem 2 814 cm³ de volume. A altura do tronco mede 18 cm e o lado do quadrado da base maior mede 20 cm. Então, o lado do quadrado da base menor mede:

a) 8 cm d) 12 cm
b) 6 cm e) 14 cm
c) 3 cm

45)(PUC-SP) Quantos litros comporta, aproximadamente, uma caixa d'água cilíndrica com 2 m de diâmetro e 70 cm de altura?

a) 1 250 c) 2 450
b) 2 200 d) 3 140

46)(PUC-RS) Dois cilindros, um de altura 4 e outro de altura 6, têm para perímetro de suas bases 6 e 4, respectivamente. Se V1 é o volume do primeiro e V2 o volume do segundo, então:

a) V1 = V2
b) V1 = 2V2
c) V1 = 3V2
d) 2 V1 = 3V2

47)(UFGO) Para encher um reservatório de água que tem forma de um cilindro circular reto, são necessárias 5 h. Se o raio da base é 3 m e a altura 10 m, o reservatório recebe água à razão de:

a) 18 π m³/h c) 20 π m³/h
b) 30 π m³/h d) 6 π m³/h

48)(PUC-SP) Quantos mililitros de tinta podem ser acondicionados no reservatório cilíndrico de uma caneta esferográfica, sabendo que seu diâmetro é 2 mm e seu comprimento é 12 cm?

a) 0,3768 c) 0,03768
b) 3,7678 d) 37,68

49)(UCPR) Temos dois vasilhames geometricamente semelhantes. O primeiro é uma garrafa das de vinho, cuja altura é 27 cm. O segundo é uma miniatura do primeiro, usado como propaganda do produto, e cuja altura é 9 cm. Quantas vezes seria preciso esvaziar o conteúdo da miniatura na garrafa comum, para enche-la completamente?

a) 3 b) 9 c) 18 d) 27

50)(UFMG) Dois cilindros têm áreas laterais iguais. O raio do primeiro é igual a um terço do raio do segundo. O volume do primeiro é V1. o volume do segundo cilindro, em função de V1, é igual a :

a) V1 / 3 c) 2V1
b) 3V1 / 2 d) 3V1

51)(Fatec) Um cilindro reto tem volume igual a 64 dm³ e área lateral igual a 400 cm². O raio da base mede:

a) 16 dm c) 32 dm
b) 24 dm d) 48 dm

52)(UFRN) Se um cilindro eqüilátero mede 12 m de altura, então o seu volume em m³ vale

a) 144 π c) 432 π
b) 200 π d) 480 π

53)(PUC-SP) Se triplicarmos o raio da base de um cilindro, mantendo a altura, o volume do cilindro fica multiplicado por:

a) 3 b) 6 c) 9 d) 12

54)(UFCE) O raio de um cilindro circular reto é aumentado em 20% e sua altura é diminuída em 25%. O volume deste cilindro sofrerá um aumento de :

a) 2% b) 4% c) 6% d) 8%

55)(UFPA) Um cilindro eqüilátero está inscrito em um cubo de volume 27 cm³. O volume do cilindro mede, em cm³,

a) $9\pi/4$ c) $27\pi/4$
b) $27\pi/8$ d) 27π

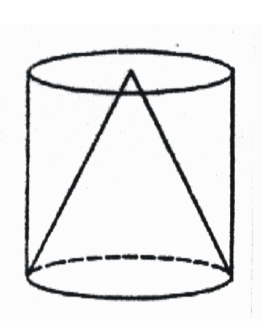
56)(UFMG) Num cilindro reto cuja altura é igual ao diâmetro da base, a área de uma secção perpendicular às bases, contendo os centros dessas, é 64 m². então a área lateral desse cilindro, em m², é:

a) 8π c) 32π
b) 16π d) 64π

57)(ITA-SP) Num cilindro circular, sabe-se que a altura *h* e o raio da base *r* são tais que os números π, *h, r,* formam, nessa ordem, uma PA de soma 6π. O valor da área total deste cilindro é:

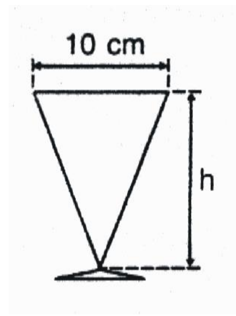
a) π^3 d) $20\pi^3$
b) $2\pi^3$ e) $30\pi^3$
c) $15\pi^3$

58) (Fuvest) O volume do cilindro é 7,086 cm³.O volume do cone é, portanto, em mm³,



a) 23,62 c) 3543
b) 35,43 d) 2362

59)(Unirio) Uma tulipa de chope tem a forma cônica, como mostra a figura ao lado. Sabendo-se que sua capacidade é de 100π ml, a altura h é igual a:



a) 20 cm　　c) 12 cm
b) 16 cm　　d) 8 cm

60)(ITA) Sabendo-se que um cone circular reto tem 3 dm de raio e 15 π dm² de área lateral, o valor de seu volume, em dm³, é:

a) 9 π　　c) 20 π
b) 12 π　　d) 36 π

61)(PUC-RS) Num cone de revolução, a área da base é 36 π m² e a área total é 96 π m². A altura do cone, em m, é igual a:

a) 4　b) 6　c) 8　d) 10

62)(UFOP) um cone circular reto tem por base uma circunferência de comprimento igual a 6 π cm e sua altura é 2/3 do diâmetro da base. Posto isto, sua área lateral, em cm², é:

a) 5 π　　c) 12 π
b) 9 π　　d) 15 π

63)(UEL-PR) O diâmetro da base de um cone circular reto mede 12 cm. Se a área da base é 3/8 da área total, o volume desse cone, em cm³, é:

a) 48 π　　c) 144 π
b) 96 π　　d) 198 π

64)(UFPA) Um cone eqüilátero tem a área da base 4 π cm². A sua lateral, em cm², é:

a) 2 π　　c) 8 π
b) 4 π　　d) 16 π

65)(Mack) Um cone e um prisma quadrangular regular retos têm bases de mesma área. O prisma tem altura 12 e volume igual ao dobro do volume do cone. Então a altura do cone vale:

a) 36　b) 24　c) 18　d) 9

66) (UFMG) Um cone circular reto tem raio da base igual a 3 e altura igual a 6. A razão entre o volume e a área da base é:

a) 3　b) 1,5　c) 2　d) 4

67) (Fatec) Suponham-se dois cones retos, de modo que a altura do primeiro é quatro vezes a altura do segundo e o raio da base do primeiro é a metade do raio da base do segundo. Se V1 e V2 são, respectivamente, os volumes do primeiro e do segundo cone, então:

a) V1 = V2
b) V1 = 2V2
c) 2V1 = 3V2
d) 3 V1 = 2V2

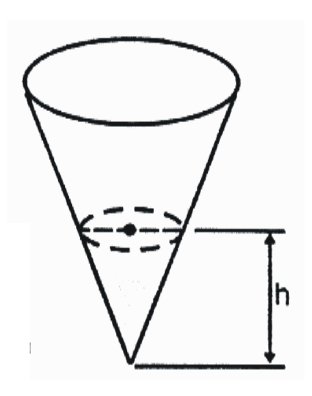
68)(UFMG) Considerem-se dois cones. A altura do primeiro é o dobro da altura do segundo; o raio da base do primeiro é a metade do raio da base do segundo. O volume do segundo é de 96 π . O volume do primeiro é:

a) 48π c) 128π
b) 64π d) 144π

69)(UFMG) Um reservatório de água tem foram de um cone circular reto, de eixo vertical e vértice para baixo. Quando o nível de água atinge a metade da altura do tanque, o volume ocupado é igual a π . A capacidade do tanque é:

a) $2\ \pi$ c) 6π
b) $4\ \pi$ d) 8π

70)(UFMG) Um tanque de água tem a forma de um cone circular reto, com seu vértice apontado para baixo. O raio do topo é igual a 9 m e a altura do tanque é de 27 m. pode0-se afirmar que o volume V da água no tanque, como função da altura h da água é:



a) V = $\dfrac{\pi h^3}{27}$ c) V = $\dfrac{\pi h^3}{3}$

b) V = $\dfrac{\pi h^3}{9}$ d) V = $3\pi h^3$

71)(Fuvest)Um copo tem a forma de um cone com altura 8 cm e raio da base 3 cm. Queremos enchê-lo com quantidades iguais de suco e de água. Para que isso seja possível, a altura x atingida pelo primeiro liquido colocado deve ser:

a) $\dfrac{8}{3}$ cm
b) 6 cm
c) $4\sqrt{3}$ cm
d) $6\sqrt{3}$ cm
e) $4\sqrt[3]{4}$ cm

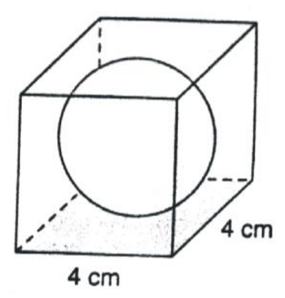
72) É dada uma esfera de raio 10 cm. Um plano α secciona essa esfera a uma distancia de 6 cm do centro da mesma. Calcule o raio da secção.

73)Calcule a área de uma superfície esférica de raio R = 3 cm.

74)Uma secção feita numa esfera por um plano é 2π cm. A distância do centro da esfera ao plano α e $2\sqrt{2}$. Calcule a medida *r* do raio da esfera.

75)Sabendo que a área de uma superfície esférica é 8π cm^2, calcule o raio da esfera.

76)A figura mostra uma esfera inscrita num cubo de aresta 4 cm (note que o plano de cada face do cubo é tangente à esfera). Calcule a área da superfície esférica.



77)(Faap-SP) A área da superfície de uma esfera e área total de um cone reto são iguais. Determine o raio da esfera, sabendo que o volume do cone é 12 π dm^3 e o raio da base é 3 dm.

78)Qual a área da superfície esférica gerada pela rotação completa do semicírculo da figura em torno do seu diâmetro AB ?
AO = 5 cm



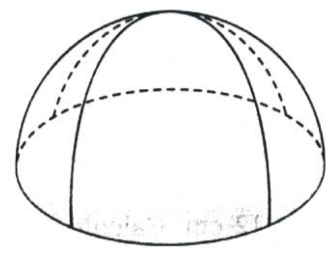
79)Um plano secciona uma esfera de raio 20 cm. A distância de centro da esfera ao plano é 12 cm. Calcule a área da secção obtida.

80)(Unicamp-SP) O volume V de uma bola de raio r é dado pela formula $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

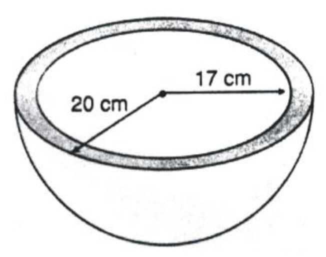
a) Calcule o volume de uma bola de raio r = $\frac{3}{4}$ cm. Para facilitar os cálculos você deve substituir π pelo número $\frac{22}{7}$.

b) Se uma bola de raio r = $\frac{3}{4}$ cm é feita com um material cuja a densidade volumétrica (quociente da massa pelo volume) é de 5,6 g/cm³, qual será a sua massa?

81)Um reservatório em forma de uma semi-esfera tem 18 m de diâmetro. Qual o volume de água que cabe nesse reservatório?



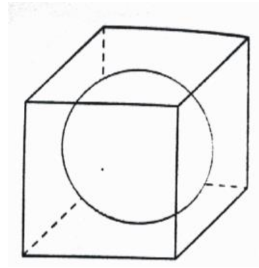
82) O recipiente da figura é feito de madeira com densidade 0,7 g/m³ e tem a forma de uma semi-esfera com raio externo de 20 cm e raio interno de 17 cm. Calcule a massa, em quilogramas, desse recipiente.



83). (UMC-SP) Um joalheiro fundiu uma esfera de ouro de raio 6 mm para transformá-la num bastão cilíndrico reto, cujo raio da base era igual ao da esfera. Calcule o comprimento do bastão.

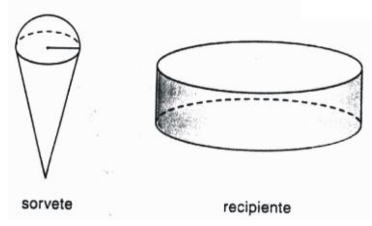
84) Uma esfera é seccionada por um plano α distante 12 cm do centro da esfera. O raio da secção obtida é 9 cm. Calcule o volume da esfera.

85) (Unitau-SP) Uma esfera está inscrita em um cubo de aresta 4 cm. Calcule a área da superfície esférica e o volume da esfera.

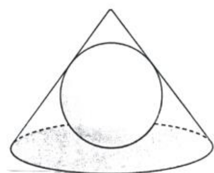


86) Uma esfera está inscrita num cilindro eqüilátero de raio *a*. Qual é a razão entre o volume V1 da esfera e o volume V2 do cilindro?

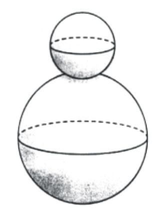
87)(UnB-DF) Um sorveteiro vende sorvetes em casquinhas de biscoito que têm a forma de cone de 3 cm de diâmetro e 6 cm de profundidade. As casquinhas são totalmente preenchidas se sorvete e, ainda, nelas é superposta uma meia bola de sorvete de mesmo diâmetro do cone. Os recipientes onde é armazenado o sorvete têm forma cilíndrica de 18 cm de diâmetro e 5 cm de profundidade. Determine o numero de casquinhas que podem ser servidas com o sorvete armazenado em um recipiente cheio.



88)(UFPE) A figura ilustra a esfera de maior raio contida no cone reto de raio da base igual a 6 e altura igual a 8, tangente ao plano da base do cone. Qual o inteiro mais próximo da metade do volume da região do cone exterior à esfera?

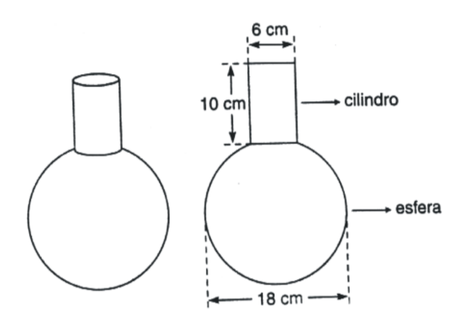


89)(UFRJ) Ping Oin recolheu 4,5 m³ de neve para construir um grande boneco de 3 m de altura, em comemoração à chegada do verão no Pólo Sul. O boneco será composto por uma cabeça e um corpo, ambos em forma de esfera, tangentes, sendo o corpo maior que a cabeça, conforme mostra a figura. Para calcular o raio de cada uma das esferas, Ping Oin aproximou por 3.



Calcule, usando a aproximação considerada, os raios das duas esferas.

90)Calcule, aproximadamente, a capacidade em mililitros do recipiente indicado na figura. Adote π = 3,14.



91)(UFSC) Um recipiente de forma cilíndrica medindo 12 cm de raio interno é preenchido com água até uma altura *h*. Uma bola (esfera) de raio 12 cm é colocada no fundo desse recipiente e constatamos que a água recobre exatamente o nível da bola. Quanto mede a altura *h* (em centímetros)?

92)Ache a área de um fuso esférico de 45º, contido numa circunferência de raio 8 cm.

93) Calcule o volume de uma cunha esférica de raio 6 cm, cujo ângulo diedro mede:

a) 60º b) $\frac{\pi}{4}$ rad

94)A área de um fuso esférico mede 25π cm². Sabendo que o ângulo do fuso mede $\frac{\pi}{2}$ rad, calcule o raio da superfície esférica.

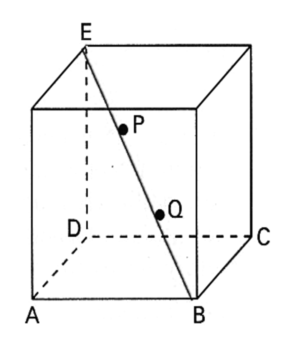
GABARITO

1)D	2)B	3)B	4)A	5)C	6)	7)	8)	9)	10)
11)	12)	13)	14)	15)	16)	17)	18)	19)	20)
21)	22)	23)	24)	25)	26)	27)	28)	29)	30)A
31)D	32)A	33)B	34)C	35)B	36)B	37)D	38)A	39)B	40)C
41)C	42)D	43)A	44)C	45)B	46)D	47)A	48)A	49)D	50)D
51)C	52)C	53)A	54)C	55)D	56)C	57)C	58)D	59)C	60)B
61)C	62)D	63)B	64)C	65)C	66)C	67)A	68)A	69)D	70) D
71)N TEM	72) 8 CM	73) 36 π CM²	74) 3 CM	75) $\sqrt{2}$ CM	76)16	77) $\sqrt{6}$ DM	78) 100 π cm²	79) 256 π CM²	80) a) <u>99</u> cm³ b)9,9 g 56
81) 486 π M³	82) 4,53 KG	83) 8 MM	84) 4 500 π M³	85) 16 π CM² E	86) 2/3	87) 60 CASQUINHAS	88) 94	89) $\frac{1}{2}$ M E 1 M	90) 3334,68 ML

				$\frac{32\pi}{3}$ CM³					
91) 8 CM	92) 32 π CM²	93) A- 48 π M³ B- 36 π M³	94)5 CM						

REVISÃO

1) Um cubo de base ABCD tem volume 216 m^3. Os pontos P e Q dividem a diagonal BE em três segmentos congruentes, como mostra a figura ao lado. A distância do ponto P à base ABCD é:



$a) 2\sqrt{2}\ m$

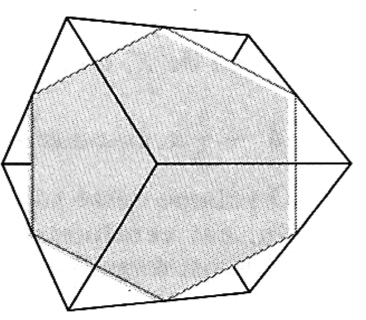
$b) 4\ m$

$c) 3\sqrt{2}\ m$

$d) 3\sqrt{3}\ m$

$e) 5\ m$

2) Um cubo e um hexágono regular estão representados na figura ao lado. Os vértices do hexágono são pontos médios de arestas do cubo. Se o volume do cubo é 64 cm^3, então a área da região sombreada é:



$a) 6\sqrt{2}$

$b) 4\sqrt{10}$

$c) 6\sqrt{8}$

$d) 6\sqrt{10}$

$e) 12\sqrt{3}$

3) A soma das áreas totais de dois cubos é 150 cm^2. Se a aresta do menor mede 3 cm, o valor da soma das diagonais destes cubos, em centímetros é:

$a) 5\sqrt{2}$

$b) 7\sqrt{3}$

$c) 3\sqrt{5}$

$d) 5\sqrt{7}$

$e) 2\sqrt{11}$

4) O lado, a diagonal de uma face e o volume de um cubo são dados, nessa ordem, por três números em progressão geométrica. A área total desse cubo é:
a) 20 b) 48 c) 24 d) 18 e) 12

5) Na figura a aresta do cubo maior mede a, e os outros cubos foram construídos de modo que a medida da respectiva aresta seja a metade da aresta do cubo anterior. Imaginando que a construção continue indefinidamente, a soma dos volumes de todos os cubos será:

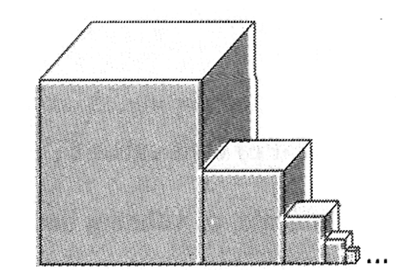
$a) 0$

$b) \frac{a^3}{2}$

$c) \frac{7a^3}{8}$

$d) \frac{8a^3}{7}$

$e) 2a^3$



6) A razão entre as Aretas de dois cubos é $\frac{1}{3}$. A razão entre o volume do maior e do menor é:

$a) \frac{1}{9}$

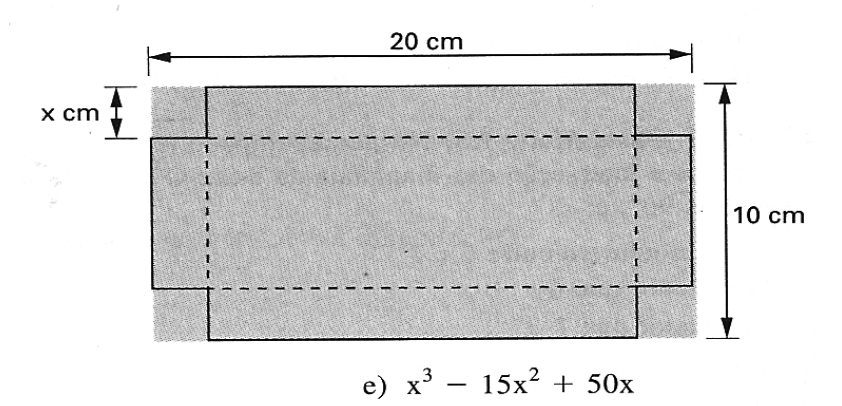
$b) \frac{1}{3}$

$c)\ 3$

$d) 9$

$e) 27$

7) Considere um pedaço de cartolina retangular de lado menor 10 cm e lado maior 20 cm. Retirando-se 4 quadrados iguais de lados x cm (um quadrado de cada canto) e dobrando-se na linha tracejada conforme mostra a figura, obtém-se uma pequena caixa retangular sem tampa. O polinômio na variável x que representa o volume desta caixa, em cm^3, é:



e) $x^3 - 15x^2 + 50x$

$a) 4x^3 - 60x^2 + 200x$

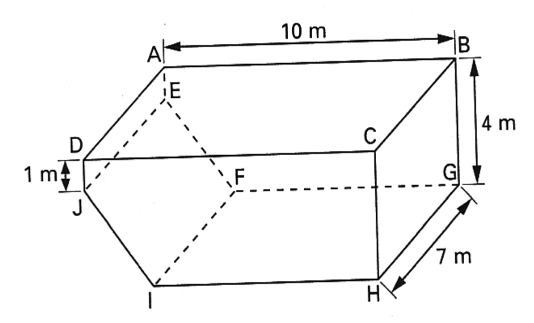
$b) 4x^2 - 60x + 200$

$c) 4x^3 - 60x^2 + 200$

$d) x^3 - 30x^2 + 200x$

$e) x^3 - 15x^2 + 50x$

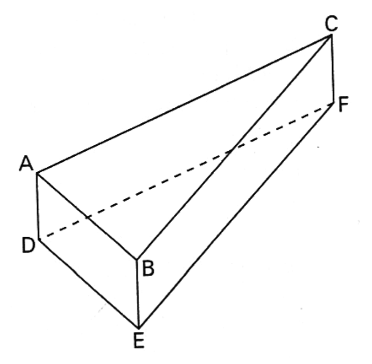
8) Observe a piscina ao lado. Ela representa um piscina retangular com 10 m de comprimento e 7 m de largura. As laterais AEJD e BGHC são retângulos, situados em planos perpendiculares ao plano que contém o retângulo ABCD. O fundo da piscina tem uma área total de 77 m^2 e é formado por dois retângulos, FGHI e EFIJ. O primeiro desse retângulos corresponde à parte da piscina onde a profundidade é de 4m e o segundo, à parte da piscina onde a profundidade varia entre 1 m e 4 m. A piscina, inicialmente vazia, recebe água à taxa de 8 000 litros por hora. Assim sendo, o tempo necessário para encher totalmente a piscina é de:



a) 29h e 30 min
b) 30h e 15 min
c) 29h e 45 min
d) 30h e 25min

9) Na figura tem-se o prisma reto ABCDEF, no qual DE = 6cm , EF = 8 cm e DE é perpendicular a EF. Se o volume desse prisma é 120 cm^3 , a sua área total, em centímetros quadrados, é:

a) 144
b) 156
c) 160
d) 168
e) 172



10) Um prisma reto é tal que sua base é um triângulo eqüilátero cujo lado mede $4\sqrt{3}$ cm e o seu volume é igual ao volume de um cubo de aresta medindo $4\sqrt{3}$ cm. A área total desse prisma, em centímetros quadrados é:

$a) 24\sqrt{3}$

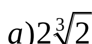
$b) 192\sqrt{3}$

$c) 204\sqrt{3}$

$d) 216\sqrt{3}$

$e) 228\sqrt{3}$

11) Um recipiente em forma de prisma hexagonal regular contém um líquido até certo nível. Colocando-se nesse recipiente um cubo, o nível do líquido aumenta 2 dm. Sabendo-se que a aresta da base do recipiente mede 3 dm, conclui-se que a aresta do cubo mede, em dm:



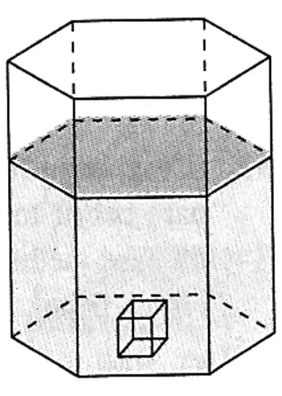
$a) 2\sqrt[3]{2}$

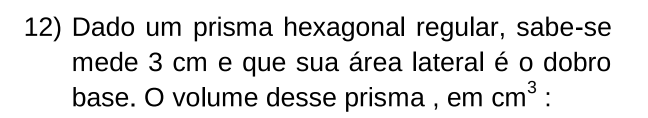
$b) 3\sqrt{2}$

$c) 3\sqrt[6]{3}$

$d) 3\sqrt[6]{6}$

$e) 3\sqrt[5]{3}$





12) Dado um prisma hexagonal regular, sabe-se que sua altura mede 3 cm e que sua área lateral é o dobro da área de sua base. O volume desse prisma , em cm^3 :

$a) 27\sqrt{3}$

$b) 13\sqrt{2}$

$c) 12$

$d) 54\sqrt{3}$

$e) 17\sqrt{5}$

13) Um tanque tem a forma de um prisma reto de base quadrada e está totalmente cheio d'água. Se a aresta de sua base mede 2 m e a altura mede 0,9 m , quantos litros d'água devem ser retirados do seu interior para que o líquido restante ocupe os $\frac{2}{3}$ se sua capacidade?

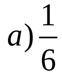
a) 120 b) 240 c) 1200 d) 2400 e) 12000

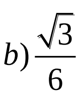
14) Uma folha de papel colorido, com a forma de um quadrado de 20 cm de lado, será usada para cobrir todas as faces e a base de uma pirâmide quadrangular regular com altura de 12 cm e apótema da base medindo 5 cm. Após se ter concluído essa tarefa, e levando-se em conta que não houve desperdício de papel, a fração percentual que sobrará dessa folha de papel corresponde a:

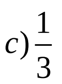
a) 20 %
b) 16%
c) 15%
d) 12%

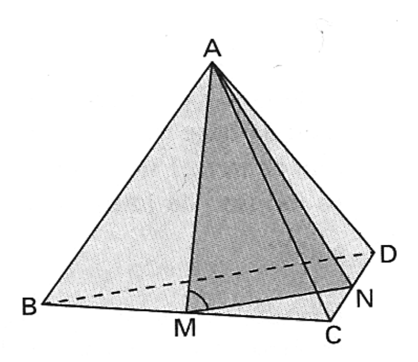
e) 10%

15) O tetraedro regular ABCD está representado na figura ao lado. M é o ponto médio da aresta BC e N é o ponto médio da aresta CD. O cosseno do ângulo NMA é:


$a)\ \frac{1}{6}$


$b)\ \frac{\sqrt{3}}{6}$


$c)\ \frac{1}{3}$



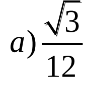
$d)\ \frac{\sqrt{3}}{3}$

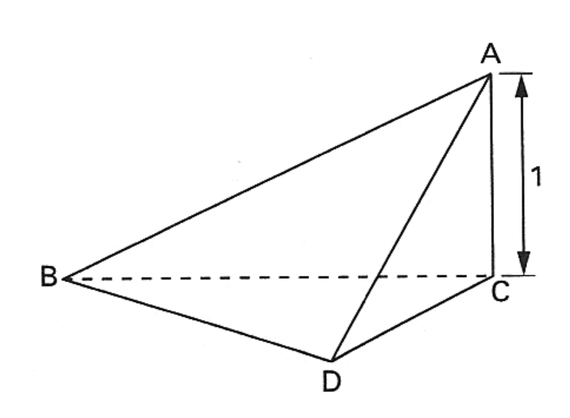
$e)\ \frac{\sqrt{3}}{2}$

16) Seja uma pirâmide regular de base hexagonal e altura 10 m. a que distância do vértice devemos cortá-la por um plano paralelo à base de forma que da pirâmide obtida seja $\frac{1}{8}$ do volume da pirâmide original?

a) 2 m
b) 4 m
c) 5 m
d) 6 m
e) 8 m

17) O volume do sólido da figura ao lado é:
Dados: $C\widehat{A}B = D\widehat{A}C = 30°; B\widehat{C}D = 60°; \overline{AC} \perp \overline{DC}$ ..


$a)\ \frac{\sqrt{3}}{12}$



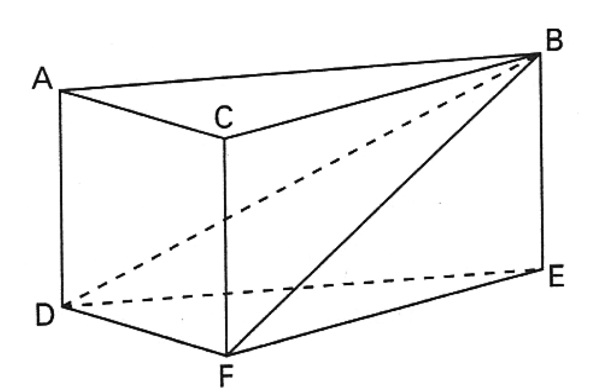
$b)\ \frac{\sqrt{3}}{18}$

$c)\ \frac{\sqrt{3}}{20}$

$d)\ \frac{\sqrt{3}}{24}$

$e)\ \frac{\sqrt{3}}{36}$

18) Observe a figura . Ela representa um prisma de base triangular. O plano que contém os vértices B, D e F divide esse prisma em dois sólidos: DACFB, de volume V_1 e DEFB, de volume V_2 . Assim sendo, a razão $\frac{V_1}{V_2}$ é:



$a)1$

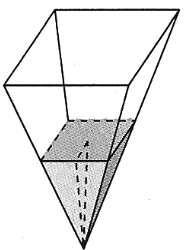
$b)\frac{3}{2}$

$c)2$

$d)\frac{5}{2}$

19) Um técnico agrícola utiliza um pluviômetro na forma de pirâmide quadrangular para verificar o índice pluviométrico de um certa região. A água, depois de recolhida, é colocada num cubo de 10 cm de aresta. Se, a pirâmide, a água atinge uma altura de 8 cm e forma uma pequena pirâmide de 10 cm de apótema lateral, então a altura atingida pela água no cubo é de :

a) 2,24 cm
b) 2,84 cm
c) 3,84 cm
d) 4,24 cm
e) 6,72 cm



20) Aumentando-se o raio de um cilindro em 4 cm e mantendo-se a sua altura, a área lateral do novo cilindro é igual à área total do cilindro original. Sabendo-se que a altura do cilindro original mede 1 cm, então o seu raio mede, em cm:

a) 1
b) 2
c) 4
d) 6

21) Uma fábrica precisa produzir embalagens cilíndricas para acondicionar um de seus produtos, todavia pretende investir na apresentação e na economia do material a ser gasto. Nesse sentido foram pensados dois tipos de embalagens cilíndricas (figura 1 e 2). O material gasto no revestimento de cada embalagem corresponde às suas áreas totais S_1 e S_2 , respectivamente. Considerando $r_1 = r$ e $r_2 = \frac{r}{2}$; $h_1 = r$ e $h_2 = 2r$, um técnico conseguiu detectar que:

$a) S_1 = S_2$

$b) S_1 > S_2$

$c) S_1 < S_2$

$d) S_1 = 2S_2$

$e) S_1 = \frac{S_2}{2}$

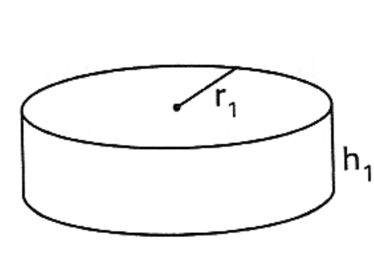


Figura 1

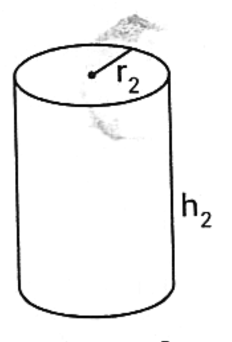


Figura 2

22) O raio de um cilindro de revolução mede 1,5m. Sabe-se que a área da base do cilindro coincide com a área da seção determinada por um plano que contém o eixo do cilindro. Então, a área total do cilindro, em m^2 , vale:

$a)\dfrac{3\pi^2}{4}$

$b)\dfrac{9\pi(2+\pi)}{4}$

$c)\pi(2+\pi)$

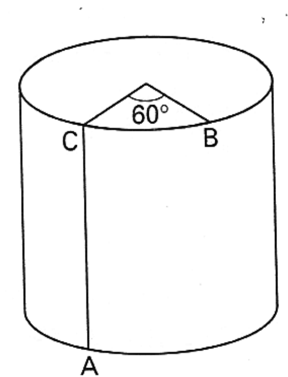
$d)\dfrac{\pi^2}{2}$

$e)\dfrac{3\pi(\pi+1)}{2}$

23) Um tanque para depósito de combustível tem a forma cilíndrica de dimensões: 10m de altura e 12 m de diâmetro. Periodicamente é feita a conservação do mesmo, pintando-se sua superfície lateral externa. Sabe-se que com uma lata de tinta pintam-se 14m^2 da superfície. Nessas condições, é verdade que a menor quantidade de latas que será necessária para a pintura da superfície lateral do tanque é:

a) 14
b) 23
c) 27
d) 34
e) 54

24) Na figura , os pontos A e B estão nos círculos das bases de um cilindro reto, de raio da base $\dfrac{15}{\pi}$ e altura 12. Os pontos A e C pertencem a uma geratriz do cilindro e o arco BC mede 60 graus. Qual a menor distância entre a e B medida sobre a superfície do cilindro?



a) 10
b) 11
c) 12
d) 13
e) 14

25) Uma lata de forma cilíndrica, com tampa, deve ser construída com 60 cm^2 de folha de alumínio. Se r é o raio da Bse e h é a altura da lata que proporcionam o volume máximo, então o valor de $\dfrac{r}{h}$ é:

a) 1
b) 2
c) $\dfrac{1}{2}$
d) $\dfrac{1}{3}$
e) $\dfrac{1}{4}$

26) Um aquário cilíndrico, com 30 cm de altura e área da base igual a 1200 cm^2, está com água até a metade de sua capacidade. Colocando-se pedras dentro desse aquário, de modo que fiquem totalmente submersas, o nível da água sobe para 16,5 cm. Então, o volume das pedras é:

a) 1200 cm^2
b) 2100 cm^2
c) 1500 cm^2
d) 1800 cm^2
e) 2000 cm^2

27) O raio de um cilindro circular reto é aumentado de 25%; para que o volume permaneça o mesmo, a altura do cilindro deve ser diminuída de k%. Então k vale:

a) 25
b) 28
c) 30
d) 32
e) 36

28) O volume de um cilindro circular reto é $36\sqrt{6}\pi\ cm^3$. Se a altura desse cilindro mede $6\sqrt{6}$ cm, então a área total desse cilindro, em cm^2 , é:

$a)72\pi$

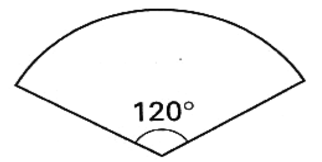
$b)84\pi$

$c)92\pi$

$d)96\pi$

29) O setor circular da figura é a superfície lateral de um cone cuja base tem diâmetro 4 e área igual a k% da área total do cone. Então k vale:

a) 20
b) 25
c) 30
d) 35
e) 40



30) Num cone circular reto, a altura é a média geométrica entre o raio da base e a geratriz. A razão entre a altura e o raio da base é:

$a)\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$b)\ \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$c)\ \dfrac{\sqrt{-1+\sqrt{5}}}{2}$

$d)\ \dfrac{1+\sqrt[3]{5}}{3}$

$e)\ \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$

31) Um cone circular reto tem altura de 8 cm e raio da base medindo 6 cm. Qual é, em centímetros quadrados, sua área lateral?

$a) 20\pi$

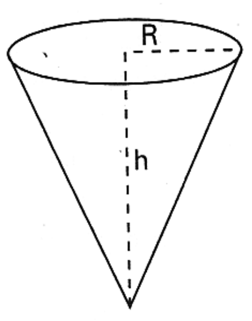
$b) 30\pi$

$c) 40\pi$

$d) 50\pi$

$e) 60\pi$

32) Uma caixa d'água, com capacidade de 810 m^3 de volume, te a forma de um cone circular reto invertido, conforme a figura. Se o nível da água na caixa corresponde a $\frac{1}{3}$ da altura do cone, o volume de água existente, em litros, é:



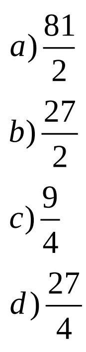


a) 10 000
b) 20 000
c) 30 000
d) 40 000
e) 50 000

33) Uma taça perfeitamente cônica foi colocada sob uma torneira que estava pingando. Em 20 minutos o nível da água atingia a metade da altura da taça. A continuar nesse ritmo, a taça estará completamente cheia em mais:

a) 20 minutos
b) 40 minutos
c) 1 hora e 20 minutos
d) 2 horas e 20 minutos
e) 3 horas

34) Na figura, a base do cone reto está inscrita na face do cubo. Supondo $\pi = 3$, se a área total do cubo é 54, então o volume do cone é:



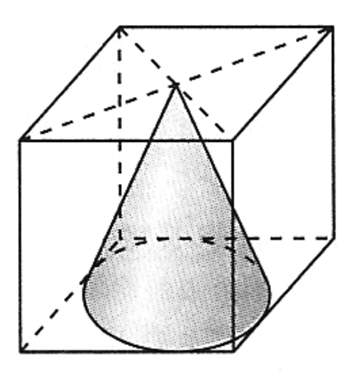
$a)\frac{81}{2}$

$b)\frac{27}{2}$

$c)\frac{9}{4}$

$d)\frac{27}{4}$

$e)\frac{81}{4}$



35) A altura de um cone circular reto mede o t5riplo da medida do raio da Bse. Se o comprimento da circunferência dessa base é 8π cm, então o volume do cone, em centímetros cúbicos, é:

$a)64\pi$

$b)48\pi$

$c)32\pi$

$d)16\pi$

$e)8\pi$

36) O raio da base de um cone circular reto é igual à média aritmética da altura e a geratriz do cone. Sabendo-se que o volume do cone é 128π m^3, temos que o raio da Bse e a altura do cone medem, respectivamente, em metros:

a) 9 e 8
b) 8 e 6
c) 8 e 7
d) 9 e 6
e) 10 e 8

37) Calculou-se o volume de um cone reto de geratriz 1 e a área lateral k. O maior valor inteiro que k pode assumir é:

a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

38) O volume da esfera A é $\frac{1}{8}$ do volume de uma esfera B. Se o raio da esfera B mede 10, então o raio da esfera A mede:

a) 5
b) 4
c) 2,5
d) 2
e) 1,25

39) Sendo S uma esfera de raio r, o valor pelo qual deveríamos multiplicar r, a fim de obtermos uma nova esfera S' , cujo volume seja o dobro do volume de S, é:

$a)\sqrt[3]{2}$

$b)2\sqrt[3]{2}$

$c)2$

$d)3$

$e)\sqrt{3}$

40) Na famosa cidade de Sucupira, foi feito um monumento de concreto com pedestal em forma de uma esfera de raio 5m, em homenagem ao anti-heroi “Zeca Diabo”. O cidadão “Nezinho do Jegue” foi informado de que, apesar de o preço do metro cúbico do concreto ser 260 reais, o custo total do concreto do pedestal, feito com dinheiro público, foi de 500 mil reais. Nezinho do Jegue verificou, então, que houve um superfaturamento: (use $\pi = 3,14$)

a) Menor que 50 mil reais
b) Entre 50 e 200 mil reais
c) Entre 200 e 300 mil reais
d) Entre 300 e 400 mil reais
e) Acima de 400 mil reais

41) Derretendo uma peça maciça de outro de forma esférica, quantas peças da mesma forma se pode confeccionar com esse ouro, se o raio das novas peças é um terço do raio da anterior? Admita que não houve perda de ouro durante o derretimento:

a) 3
b) 9
c) 18
d) 21
e) 27

42) As cidades de Quito e Cingapura encontram-se próxima à linha do equador e em pontos diametralmente opostos no globo terrestre. Considerando o raio da Terra igual a 6 370 km, pode-se afirmar que um avião saindo de Quito. Voando em média 800 km/h, descontando as paradas de escala, chega a Cingapura em aproximadamente:

a) 16 horas
b) 20 horas
c) 25 horas
d) 32 horas
e) 36 horas

43) Um plano seciona uma esfera determinando um círculo de $16\pi\ cm^2$ de área. Sabendo-se que o plano dista 3 cm do centro da esfera. Então o volume da esfera é igual a:

$a)\dfrac{100\pi}{3}cm^3$

$b)\dfrac{125\pi}{3}cm^3$

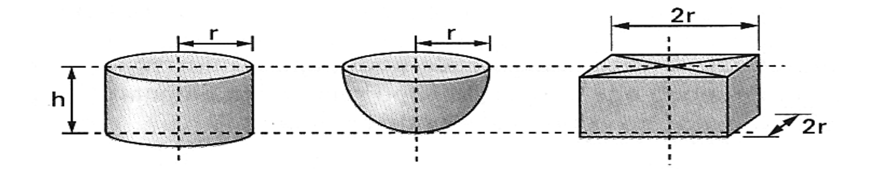
$c)150\pi\ cm^3$

$d)\dfrac{500\pi}{3}cm^3$

$e)200\pi\ cm^3$

44) Na figura estão representados três sólidos de mesma altura h – um cilindro, uma semi-esfera e um prisma – cujos volumes são V_1, V_2 e V_3, respectivamente.

A relação entre V_1, V_2 e V_3 é:



$a) V_3 < V_2 < V_1$

$b) V_2 < V_3 < V_1$

$c) V_1 < V_2 < V_3$

$d) V_3 < V_1 < V_1$

$e) V_2 < V_1 < V_3$

45) Uma esfera de raio 2 cm é mergulhada num copo cilíndrico de 4 cm de raio, até encostar no fundo, de modo que a água do copo recubra exatamente a esfera. Antes de a esfera ser colocada no copo, a altura da água era:

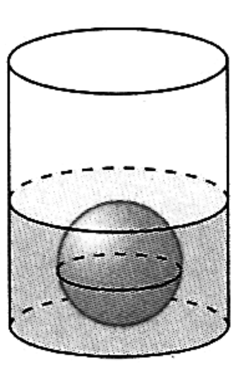
$a) \frac{27}{8} cm$

$b) \frac{19}{6} cm$

$c) \frac{18}{5} cm$

$d) \frac{10}{3} cm$

$e) \frac{7}{2} cm$



46) Um fabricante de brinquedos recebeu o projeto de uma caixa que deverá conter cinco pequenos sólidos, colocados na caixa por uma abertura em sua tampa. A figura representa a planificação da caixa, com as medidas dadas em centímetros. Os sólidos são fabricados nas formas de:

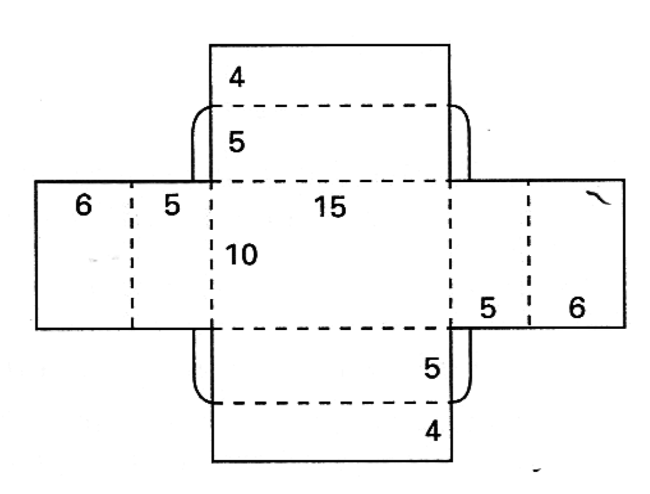
I) Um cone reto de altura 1 cm e raio da base 1,5 cm

II) Um cubo de aresta 2 cm

III) Uma esfera de raio 1,5 cm

IV) Um paralelepípedo retangular reto, de dimensões 2 cm, 3 cm e 4 cm

V) Um cilindro reto de altura 3 cm e raio da base 1 cm.



O fabricante não aceitou o projeto, pois percebeu que, pela abertura dessa caixa, só poderia colocar os sólidos dos tipos:

a) I, II e III
b) I, II e V
c) I, II, IV e V
d) III, IV e V

47) Dois cones retos C_1 e C_2 têm alturas iguais e raios da base de medidas r_1 cm e r_2 cm, respectivamente. Se $r_1 = \frac{4}{5}r_2$, então a razão entre os valores de C_1 e C_2, nessa ordem, é:

$a)\frac{24}{25}$

$b)\frac{16}{25}$

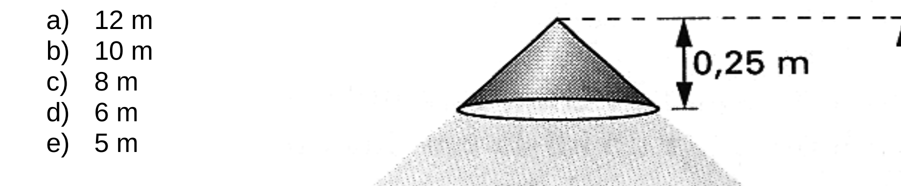
$c)\frac{18}{25}$

$d)\frac{4}{5}$

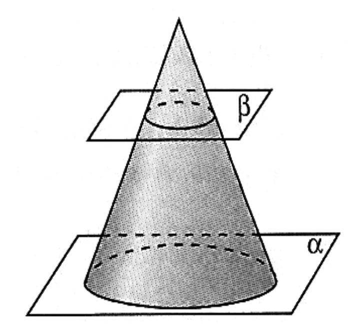
$e)\frac{22}{25}$

48) Considerando um lustre de formato cônico com altura e raio da base igual a 0,25 m, a distância do chão (H) em que se deve perdurá-lo para obter um lugar iluminado em forma de círculo com área de $25\pi \text{ cm}^2$ é de:

a) 12 m
b) 10 m
c) 8 m
d) 6 m
e) 5 m



49) Na figura tem-se, apoiado no plano α, um cone circular reto cuja altura mede 8 cm e cujo raio da base mede 4 cm. O plano β é paralelo a α e a distância entre os dois planos é de 6 cm. O volume do cone que está apoiado no plano β é, em centímetros cúbicos igual a:



$a)\frac{\pi}{3}$

$b)\frac{\pi}{2}$

$c)\frac{2\pi}{3}$

$d)\frac{3\pi}{4}$

$e)\frac{4\pi}{5}$

50) Um copo de chope é um cone (oco) suja altura é o dobro do diâmetro. Se uma pessoa bebe desde que o copo está cheio até o nível da bebida ficar exatamente na metade da altura do copo, a fração do volume total que deixou de ser consumida é:

$a)\frac{3}{4}$

$b)\frac{1}{2}$

$c)\frac{2}{3}$

$d)\frac{3}{8}$

$e)\frac{1}{8}$

51) Um cone circular tem volume V. Interceptando-o na metade de sua altura por um plano paralelo à base, obtém-se um novo cone cujo volume é:

$a)\frac{V}{2}$

$b)\frac{V}{3}$

$c)\frac{V}{4}$

$d)\frac{V}{8}$

$e)\frac{V}{16}$

52) Um cone tem altura $12\sqrt[3]{2}\ \text{cm}$ e está cheio de sorvete. Dois amigos vão dividir o sorvete em duas partes de mesmo volume, usando um plano paralelo à base do cone. Qual deverá ser a altura do cone menor assim obtido?

$a)12\ cm$

$b)12\sqrt{2}$ cm

$c)12\sqrt{3}$ cm

$d)10\sqrt{2}$ cm

$e)10\sqrt{3}$ cm

53) Uma pirâmide hexagonal regular, com a aresta da base 9 cm e aresta lateral 15 cm, foi seccionada por dois planos paralelos à sua base que dividiram sua altura em três partes iguais. A parte da pirâmide compreendida entre esses planos, tem volume, em cm^3 , igual a:

$a)106\sqrt{3}$

$b)110\sqrt{3}$

$c)116\sqrt{3}$

$d)120\sqrt{3}$

$e)126\sqrt{3}$

54) Uma pirâmide tem altura H. A que distância do vértice deve-se passar um plano paralelo à base para dividi-la em duas partes de mesmo volume?

$a)\dfrac{H}{\sqrt[3]{2}}$

$b)\dfrac{\sqrt[3]{H}}{2}$

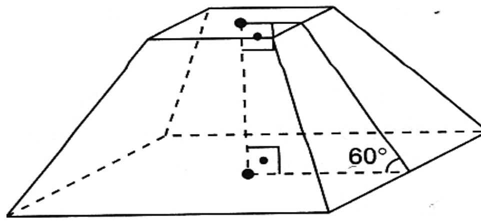
$c)3\sqrt{H}$

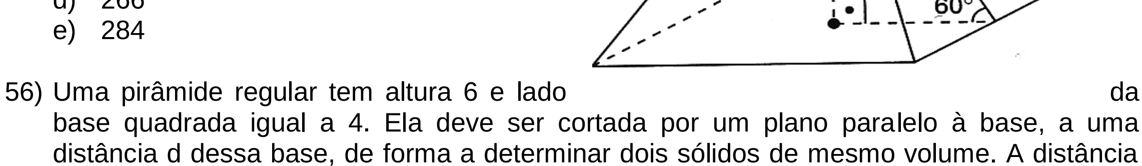
$d)\dfrac{H}{3}$

$e)\dfrac{H}{2}$

55) Considere o tronco de uma pirâmide regular de bases quadradas representado na figura. Se as diagonais das bases medem $10\sqrt{2}$ cm e $4\sqrt{2}$ cm, a área total desse tronco, em centímetros quadrados, é:

a) 168
b) 186
c) 258
d) 266
e) 284





56) Uma pirâmide regular tem altura 6 e lado da base quadrada igual a 4. Ela deve ser cortada por um plano paralelo à base, a uma distância d dessa base, de forma a determinar dois sólidos de mesmo volume. A distância d deve ter:

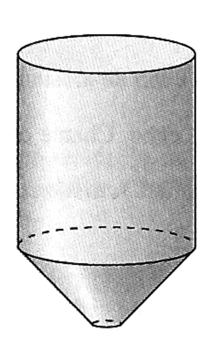
$a) 6 - 3\sqrt[3]{2}$

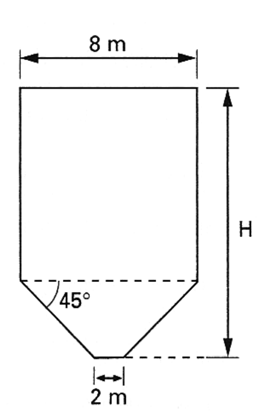
$b) 3 - \frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$

$c) 6 - 3\sqrt[3]{4}$

$d) 6 - 2\sqrt[3]{2}$

57) O proprietário de uma fazenda quer construir um silo com capacidade para 770 m^3 , para armazenamento de grãos. O engenheiro encarregado do projeto mostrou-lhe o esquema do silo, composto de um cilindro acoplado a um tronco de cone, como mostra a figura. Se, em seus cálculos, o engenheiro considerou $\pi = \frac{22}{7}$, então a altura H do silo, em metros, é:





a) 15
b) 16
c) 17
d) 18
e) 19

58) Considere que cada vértice de um cubo de aresta 1 cm é também o centro de uma esfera de raio $\frac{1}{2}$ cm. O volume da região do espaço interna ao cubo e externa às oito esferas é igual a:

$a) \frac{12-\pi}{12} cm^3$

$b) \frac{3-\pi}{3} cm^3$

$c) \frac{6-\pi}{6} cm^3$

$d) \frac{2-\pi}{2} cm^3$

59) Cada vértice de um cubo de aresta x é o centro de uma esfera de raio $\frac{x}{2}$. O volume da parte comum ao cubo e às esferas é:

$a)\ \frac{\pi x^3}{12}$

$b)\ \frac{\pi x^3}{8}$

$c)\ \frac{\pi x^3}{6}$

$d)\ \frac{\pi x^3}{4}$

$e)\ \frac{\pi x^3}{2}$

60) Um lenhador empilhou 3 troncos de madeira num caminhão de largura 2,5 m, conforme a figura. Cada tronco é um cilindro reto, cujo raio mede 0,5 m. Logo, a altura h , em metros, é:

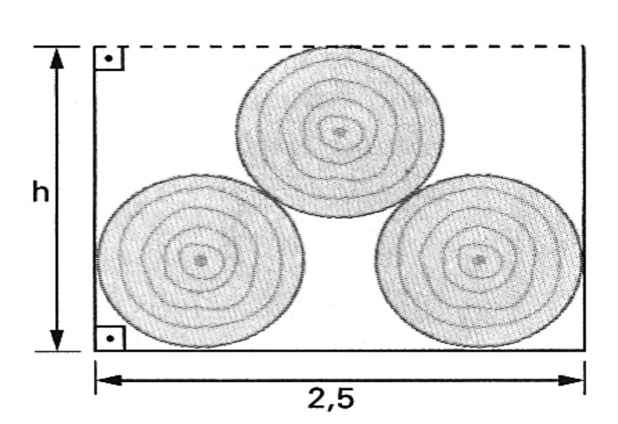
$a)\ \frac{1+\sqrt{7}}{2}$

$b)\ \frac{1+\sqrt{7}}{3}$

$c)\ \frac{1+\sqrt{7}}{4}$

$d)\ 1+\frac{\sqrt{7}}{3}$

$e)\ 1+\frac{\sqrt{7}}{4}$



PINTOU NO ENEM

1) (ENEM 2005) Um pátio de grandes dimensões vai ser revestido por pastilhas quadradas brancas e pretas, segundo o padrão representado ao lado, que vai ser repetido em toda a extensão do pátio. As pastilhas de cor branca custam R$ 8,00 por metro quadrado e as de cor preta, R$ 10,00. O custo por metro quadrado do revestimento será de

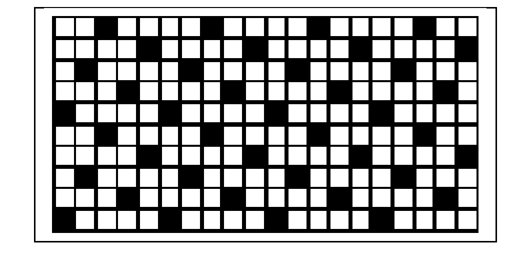
a) R$ 8,20.

b) R$ 8,40.

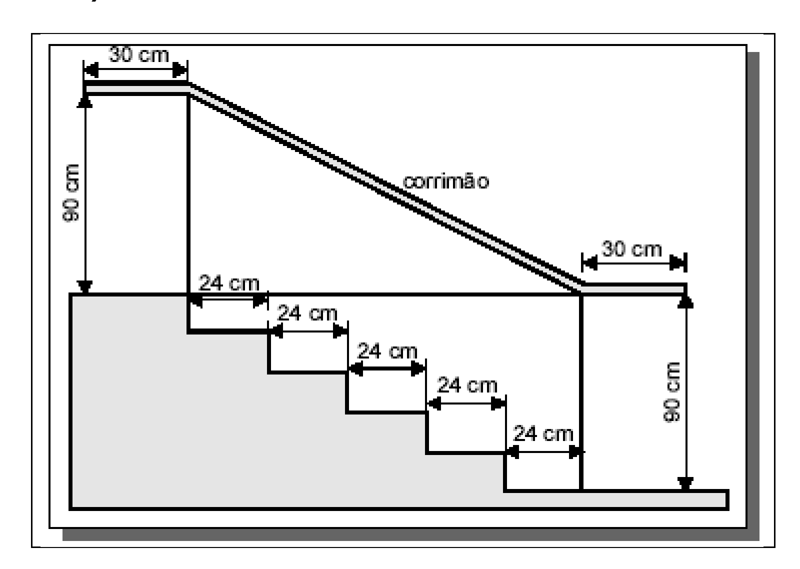
c) R$ 8,60.

d) R$ 8,80.

e) R$ 9,00.



2) (ENEM 2006).



Na figura acima, que representa o projeto de uma escada com 5 degraus de mesma altura, o comprimento total do corrimão e igual a:

a) 1,8 m.

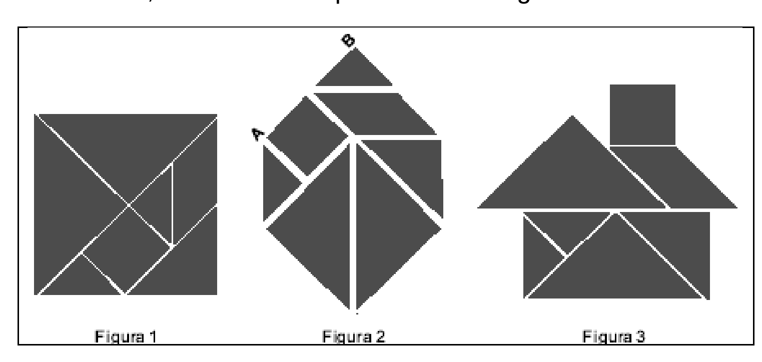
b) 1,9 m.

c) 2,0 m.

d) 2,1 m.

e) 2,2 m.

3) (ENEM 2008)
O *tangram* é um jogo oriental antigo, uma espécie de quebra-cabeça, constituído de sete peças: 5 triângulos retângulos e isósceles, 1 paralelogramo e 1 quadrado. Essas peças são obtidas recortando-se um quadrado de
acordo com o esquema da figura 1. Utilizando-se todas as sete peças, é possível representar uma grande diversidade
de formas, como as exemplificadas nas figuras 2 e 3.



Se o lado AB do hexágono mostrado na figura 2 mede 2 cm, então a área da figura 3, que representa uma "casinha", é igual a:

a) 4 cm².

b) 8 cm².

c) 12 cm².

d) 14 cm².

e) 16 cm².

3.1)(ENEM 2008) Fractal (do latim *fractus*, fração, quebrado) — objeto que pode ser dividido em partes que possuem semelhança com
o objeto inicial. A geometria fractal, criada no século XX, estuda as propriedades e o comportamento dos fractais —objetos geométricos formados por repetições de padrões similares.

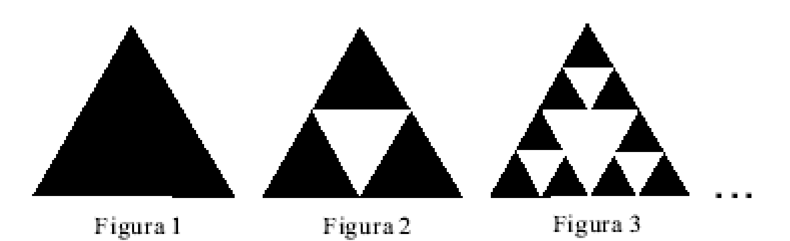
O triângulo de Sierpinski, uma das formas elementares da eometria fractal, pode ser obtido por meio dos seguintes
passos:

1. comece com um triângulo equilátero (figura 1);

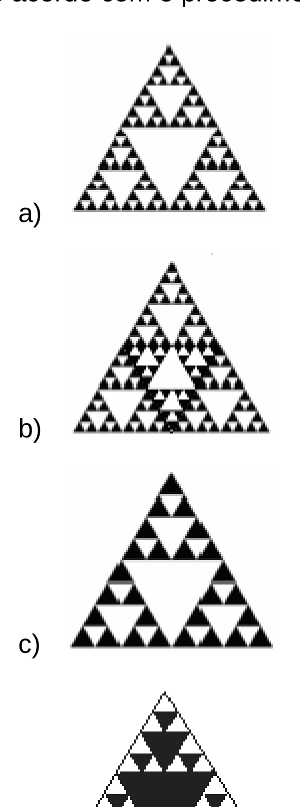
2. construa um triângulo em que cada lado tenha a etade do tamanho do lado do triângulo anterior e
faça três cópias;

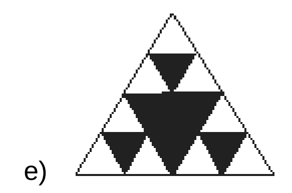
3. posicione essas cópias de maneira que cada triângulo enha um vértice comum com um dos vértices de cada m dos outros dois triângulos, conforme ilustra a figura 2;

4. repita sucessivamente os passos 2 e 3 para cada ópia dos triângulos obtidos no passo 3 (figura 3).

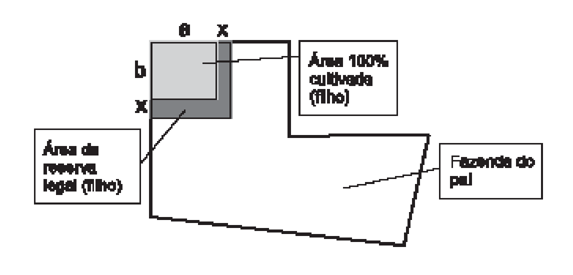


De acordo com o procedimento descrito, a figura 4 da eqüência apresentada acima é



e) 

4) (ENEM 2009)



Um fazendeiro doa, como incentivo, uma área retangular de sua fazenda para seu filho, que está indicada na figura como 100% cultivada. De acordo com as leis, deve-se ter uma reserva legal de 20% de sua área total. Assim, o pai resolve doar mais uma parte para compor a reserva para o filho, conforme a figura.

De acordo com a figura acima, o novo terreno do filho cumpre a lei, após acrescentar uma faixa de largura x metros contornando o terreno cultivado, que se destinará à reserva legal (filho). O dobro da largura x da faixa é

(A) $10\%(a+b)^2$

(B) $10\%(a \cdot b)^2$

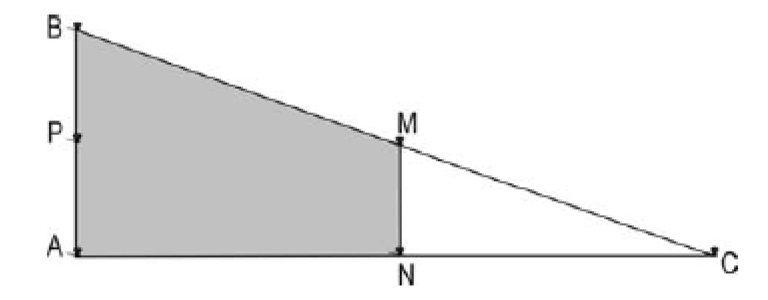
(C) $\sqrt{a+b} - (a+b)$

(D) $\sqrt{(a+b)^2 + ab} - (a+b)$

(E) $\sqrt{(a+b)^2 + ab} + (a+b)$

5) (ENEM 2010)

Em canteiros de obras de construção civil é comum perceber trabalhadores realizando medidas de comprimento e de ângulos e fazendo demarcações por onde a obra deve começar ou se erguer. Em um desses canteiros foram feitas algumas marcas no chão plano. Foi possível perceber que, das seis estacas colocadas, três eram vértices de um triângulo retângulo e as outras três eram os pontos médios dos lados desse triângulo, conforme pode ser visto na figura, em que as estacas foram indicadas por letras.



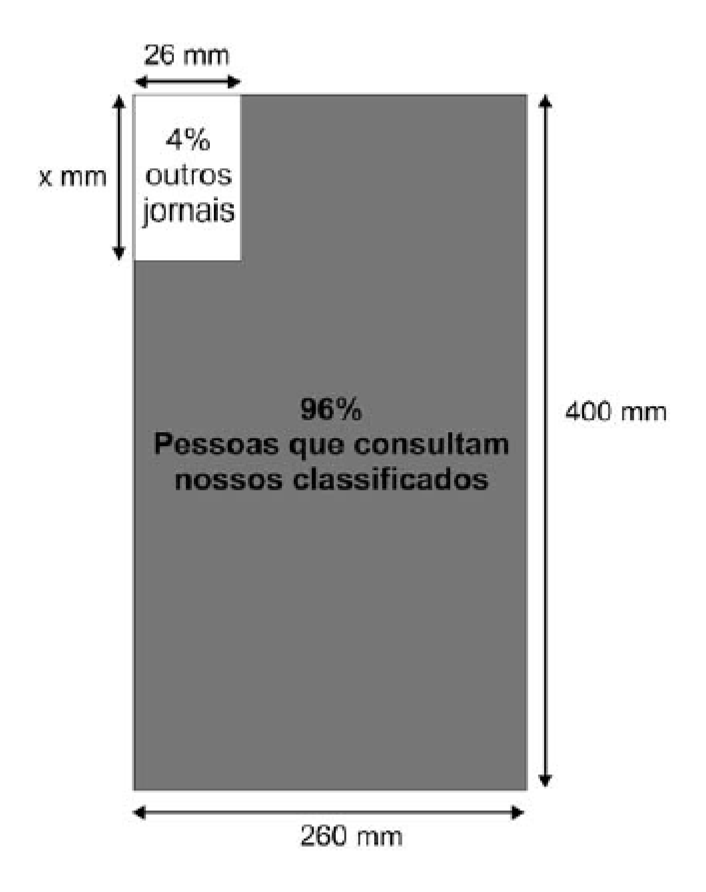
A região demarcada pelas estacas A, B, M e N deveria ser calçada com concreto.

Nessas condições, a área a ser calçada corresponde

A) à mesma área do triângulo AMC.
B) à mesma área do triângulo BNC.
C) à metade da área formada pelo triângulo ABC.
D) ao dobro da área do triângulo MNC.
E) ao triplo da área do triângulo MNC.

6) (ENEM 2010)

O jornal de certa cidade publicou em uma página inteira a seguinte divulgação de seu caderno de classificados.

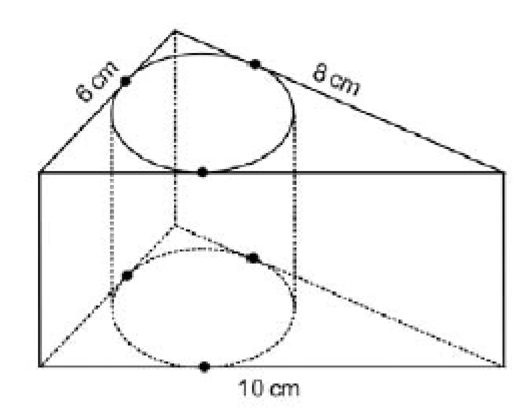


Para que a propaganda seja fidedigna à porcentagem da área que aparece na divulgação, a medida do lado do retângulo que representa os 4%, deve ser de aproximadamente

- A 1 mm.
- B 10 mm.
- C 17 mm.
- D 160 mm.
- E 167 mm.

7) (ENEM 2010)

Uma metalúrgica recebeu uma encomenda para fabricar, em grande quantidade, uma peça com o formato de um prisma reto com base triangular, cujas dimensões da base são 6 cm, 8 cm e 10 cm e cuja altura é 10 cm. Tal peça deve ser vazada de tal maneira que a perfuração na forma de um cilindro circular reto seja tangente às suas faces laterais, conforme mostra a figura.



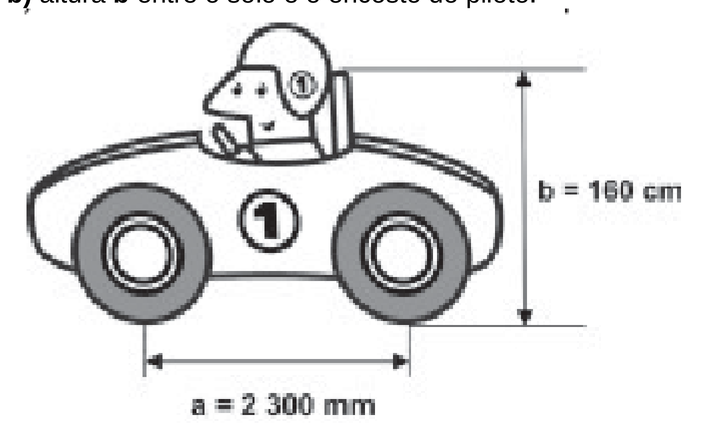
O raio da perfuração da peça é igual a

A 1 cm.
B 2 cm.
C 3 cm.
D 4 cm.
E 5 cm.

8) (ENEM 2011)

Um mecânico de uma equipe de corrida necessita que as seguintes medidas realizadas em um carro sejam obtidas em metros:

a) distância **a** entre os eixos dianteiro e traseiro;
b) altura **b** entre o solo e o encosto do piloto.

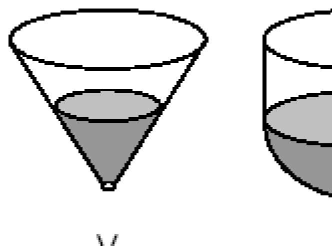


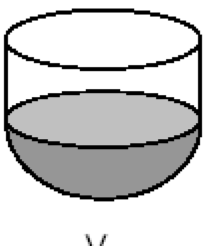
Ao optar pelas medidas **a** e **b** em metros, obtêm-se, respectivamente,

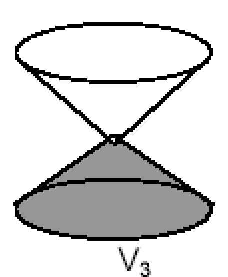
a) 0,23 e 0,16.
b) 2,3 e 1,6.
c) 23 e 16.

d) 230 e 160.
e) 2 300 e 1 600.

9) (ENEM 2005)
Os três recipientes da figura têm formas diferentes, mas a mesma altura e o mesmo diâmetro da boca.
Neles são colocados líquido até a metade de sua altura, conforme indicado nas figuras.
Representando por V_1, V_2 e V_3 o volume de líquido em cada um dos recipientes, tem-se:







(A) $V_1 = V_2 = V_3$

(B) $V_1 < V_3 < V_2$

(C) $V_1 = V_3 < V_2$

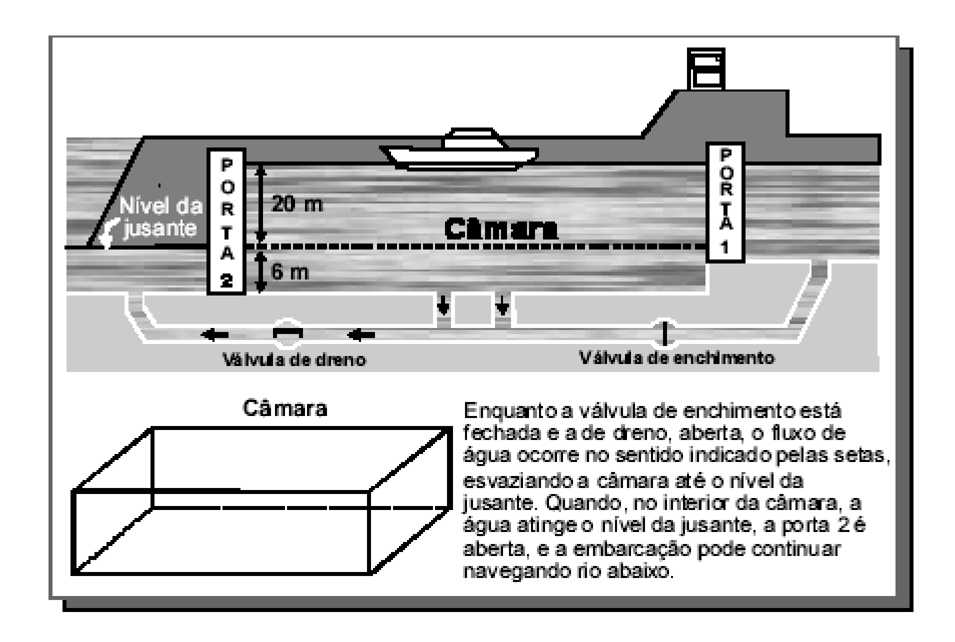
(D) $V_3 < V_1 < V_2$

(E) $V_1 < V_2 = V_3$

10 (ENEM 2006)
Uma artesa confecciona dois diferentes tipos de vela ornamental a partir de moldes feitos com cartoes de
papel retangulares de 20 cm x 10 cm (conforme ilustram as figuras abaixo). Unindo dois lados opostos do cartao, de duas maneiras, a artesa forma cilindros e, em seguida, os preenche completamente com parafina.
Supondo-se que o custo da vela seja diretamente proporcional ao volume de parafina empregado, o custo da
vela do tipo I, em relação ao custo da vela do tipo II, será

A) o triplo.
B) o dobro.
C) igual.
D) a metade.
E) a terca parte.

11) (ENEM 2006)
Eclusa e um canal que, construido em aguas de um rio com grande desnivel, possibilita a navegabilidade, subida ou descida de embarcacoes. No esquema abaixo, esta representada a descida de uma embarcacao, pela eclusa do porto Primavera, do nivel mais alto do rio Parana ate o nivel da jusante.

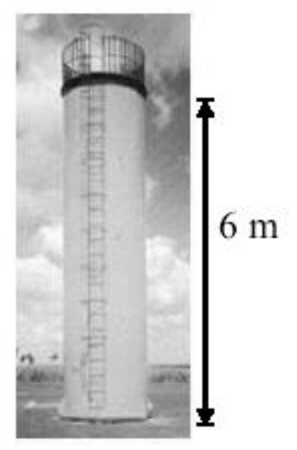


A camara dessa eclusa tem comprimento aproximado de 200 m e largura igual a 17 m. A vazao aproximada da água durante o esvaziamento da camara e de 4.200 m3 por minuto. Assim, para descer do nivel mais alto ate o nivel da jusante,uma embarcacao leva cerca de

A) 2 minutos. **C)** 11 minutos. **E)** 21 minutos.
B) 5 minutos. **D)** 16 minutos.

12) (ENEM 2007)

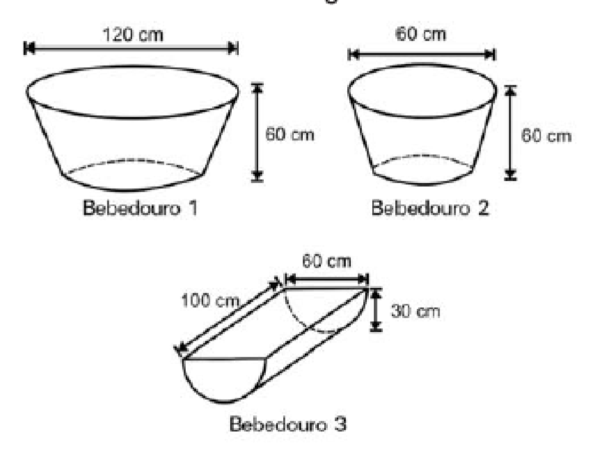
A figura ao lado mostra um reservatório de água na forma de um cilindro circular reto, com 6 m de altura. Quando está completamente cheio, o reservatório é suficiente para abastecer, por um dia, 900 casas cujo consumo médio diário é de 500 litros de água. Suponha que, um certo dia, após uma campanha de conscientização do uso da água, os moradores das 900 casas abastecidas por esse reservatório tenham feito
economia de 10% no consumo de água. Nessa situação,



A) a quantidade de água economizada foi de 4,5 m3.
B) a altura do nível da água que sobrou no reservatório, no final do dia, foi igual a 60 cm.
C) a quantidade de água economizada seria suficiente para abastecer, no máximo, 90 casas cujo consumo
diário fosse de 450 litros.
D) os moradores dessas casas economizariam mais de R$ 200,00, se o custo de 1 m3 de água para o
consumidor fosse igual a R$ 2,50.
E) um reservatório de mesma forma e altura, mas com raio da base 10% menor que o representado, teria
água suficiente para abastecer todas as casas. 6 m

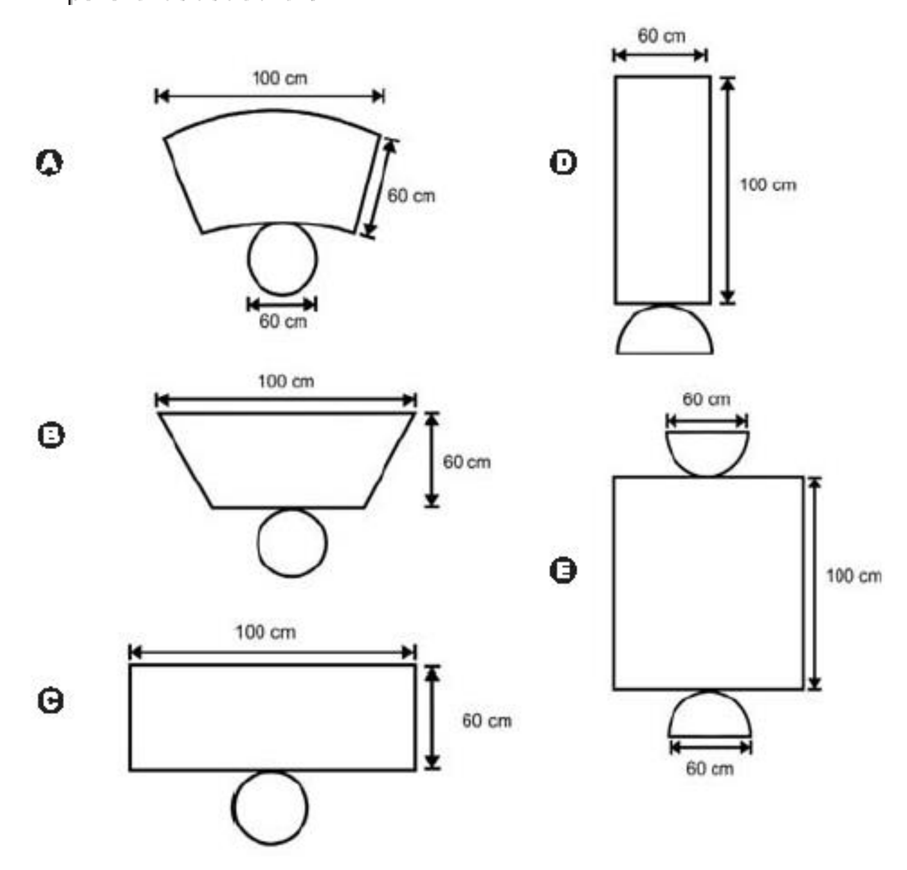
13) (ENEM 2010)

Alguns testes de preferência por bebedouros de água foram realizados com bovinos, envolvendo três tipos de bebedouros, de formatos e tamanhos diferentes. Os bebedouros 1 e 2 têm a forma de um tronco de cone circular reto, de altura igual a 60 cm, e diâmetro da base superior igual a 120 cm e 60 cm, respectivamente. O bebedouro 3 é um semicilindro, com 30 cm de altura, 100 cm de comprimento e 60 cm de largura. Os três recipientes estão ilustrados na figura.



A escolha do bebedouro. In: **Biotemas**. V. 22, n°. 4, 2009 (adaptado).

Considerando que nenhum dos recipientes tenha tampa, qual das figuras a seguir representa uma planificação para o bebedouro 3?

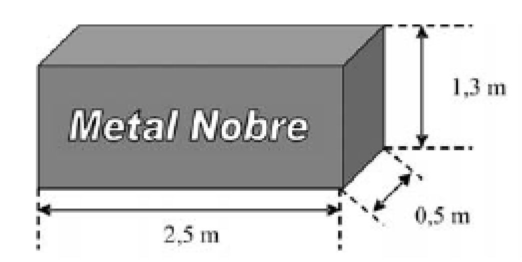


14) (ENEM 2010)

Uma fábrica produz barras de chocolates no formato de paralelepípedos e de cubos, com o mesmo volume. As arestas da barra de chocolate no formato de paralelepípedo medem 3 cm de largura, 18 cm de comprimento e 4 cm de espessura.
Analisando as características das figuras geométricas descritas, a medida das arestas dos chocolates que têm o formato de cubo é igual a

A) 5 cm.
B) 6 cm.
C) 12 cm.
D) 24 cm.
E) 25 cm.

15) (ENEM 2010)
A siderúrgica "Metal Nobre" produz diversos objetos maciços utilizando o ferro. Um tipo especial de peça feita nessa companhia tem o formato de um paralelepípedo retangular, de acordo com as dimensões indicadas na figura que segue.

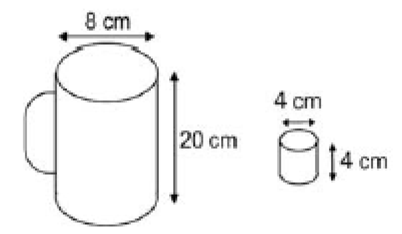


O produto das três dimensões indicadas na peça resultaria na medida da grandeza

A) massa.
B) volume.
C) superfície.
D) capacidade.
E) comprimento.

16) (ENEM 2010)

Dona Maria, diarista na casa da família Teixeira, precisa fazer café para servir as vinte pessoas que se encontram numa reunião na sala. Para fazer o café, Dona Maria dispõe de uma leiteira cilíndrica e copinhos plásticos, também cilíndricos.



Com o objetivo de não desperdiçar café, a diarista deseja colocar a quantidade mínima de água na leiteira para encher os vinte copinhos pela metade. Para que isso ocorra, Dona Maria deverá

- A encher a leiteira até a metade, pois ela tem um volume 20 vezes maior que o volume do copo.
- B encher a leiteira toda de água, pois ela tem um volume 20 vezes maior que o volume do copo.
- C encher a leiteira toda de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.
- D encher duas leiteiras de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.
- E encher cinco leiteiras de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.

17) (ENEM 2010)

No manejo sustentável de florestas, é preciso muitas vezes obter o volume da tora que pode ser obtida a partir de uma árvore. Para isso, existe um método prático, em que se mede a circunferência da árvore à altura do peito de um homem (1,30 m), conforme indicado na figura. A essa medida denomina-se "rodo" da árvore. O quadro a seguir indica a fórmula para se *cubar*, ou seja, obter o volume da tora em m^3 a partir da medida do rodo e da altura da árvore.



O volume da tora em m^3 é dado por

V = rodo² × altura × 0,06

O rodo e a altura da árvore devem ser medidos em metros. O coeficiente 0,06 foi obtido experimentalmente.

Um técnico em manejo florestal recebeu a missão de cubar, abater e transportar cinco toras de madeira, de duas espécies diferentes, sendo

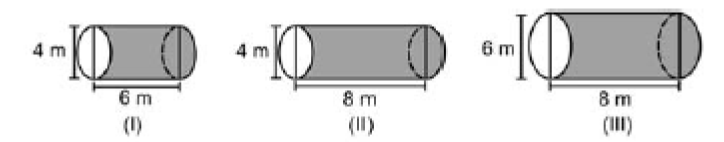
- 3 toras da espécie **I**, com 3 m de rodo, 12 m de comprimento e densidade 0,77 toneladas/m^3;
- 2 toras da espécie **II**, com 4 m de rodo, 10 m de comprimento e densidade 0,78 toneladas/m^3.

Após realizar seus cálculos, o técnico solicitou que enviassem caminhões para transportar uma carga de, aproximadamente,

A) 29,9 toneladas.
B) 31,1 toneladas.
C) 32,4 toneladas.
D) 35,3 toneladas.
E) 41,8 toneladas.

18) (ENEM 2010)

Uma empresa vende tanques de combustíveis de formato cilíndrico, em três tamanhos, com medidas indicadas nas figuras. O preço do tanque é diretamente proporcional à medida da área da superfície lateral do tanque. O dono de um posto de combustível deseja encomendar um tanque com menor custo por metro cúbico de capacidade de armazenamento.



Qual dos tanques deverá ser escolhido pelo dono do posto? (Considere $\pi \cong 3$)

A) I, pela relação área/capacidade de armazenamento de $\frac{1}{3}$.

B) I, pela relação área/capacidade de armazenamento de $\frac{4}{3}$.

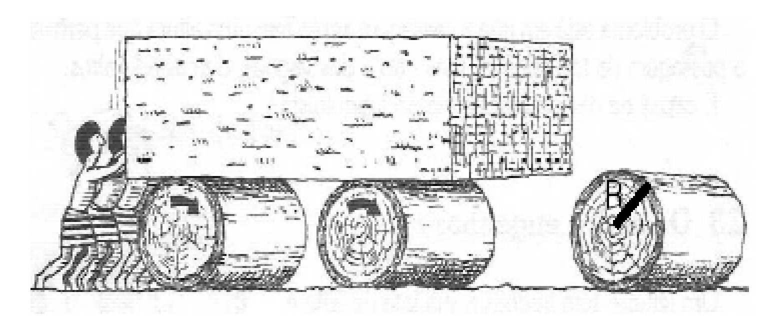
C) II, pela relação área/capacidade de armazenamento de $\frac{3}{4}$.

D) III, pela relação área/capacidade de armazenamento de $\frac{2}{3}$.

E) III, pela relação área/capacidade de armazenamento de $\frac{7}{12}$.

19) (ENEM 2010)

A ideia de usar rolos circulares para deslocar objetos pesados provavelmente surgiu com os antigos egípcios ao construírem as pirâmides.



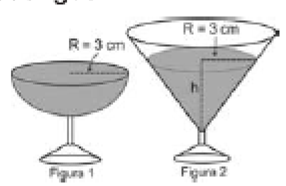
BOLT, Brian. **Atividades matemáticas**. Ed. Gradiva.

Representando por R o raio da base dos rolos cilíndricos, em metros, a expressão do deslocamento horizontal y do bloco de pedra em função de R, após o rolo ter dado uma volta completa sem deslizar, é

A) y = R.
B) y = 2R.
C) y = πR.
D) y = 2πR.
E) y = 4πR.

20) (ENEM 2010)

Em um casamento, os donos da festa serviam champanhe aos seus convidados em taças com formato de um hemisfério (Figura 1), porém um acidente na cozinha culminou na quebra de grande parte desses recipientes. Para substituir as taças quebradas, utilizou-se um outro tipo com formato de cone (Figura 2). No entanto, os noivos solicitaram que o volume de champanhe nos dois tipos de taças fosse igual.



Considere:

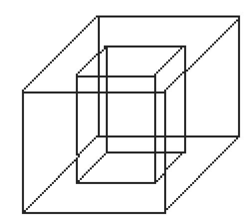
$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad e \quad V_{cone} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

Sabendo que a taça com o formato de hemisfério é servida completamente cheia, a altura do volume de champanhe que deve ser colocado na outra taça, em centímetros, é de

A) 1,33.
B) 6,00.
C) 12,00.
D) 56,52.
E) 113,04.

21) (ENEM 2010)

Um porta-lápis de madeira foi construído no formato cúbico, seguindo o modelo ilustrado a seguir. O cubo de dentro é vazio. A aresta do cubo maior mede 12 cm e a do cubo menor, que é interno, mede 8 cm.

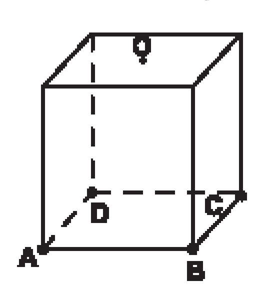


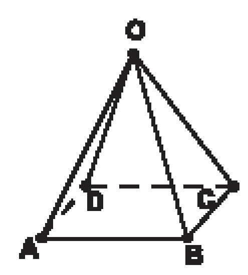
O volume de madeira utilizado na confecção desse objeto foi de

A) 12 cm^3.
B) 64 cm^3.
C) 96 cm^3.
D) 1 216 cm^3.
E) 1 728 cm^3.

22) (ENEM 2011)

Uma indústria fabrica brindes promocionais em forma de pirâmide. A pirâmide é obtida a partir de quatro cortes em um sólido que tem a forma de um cubo. No esquema, estão indicados o sólido original (cubo) e a pirâmide obtida a partir dele.





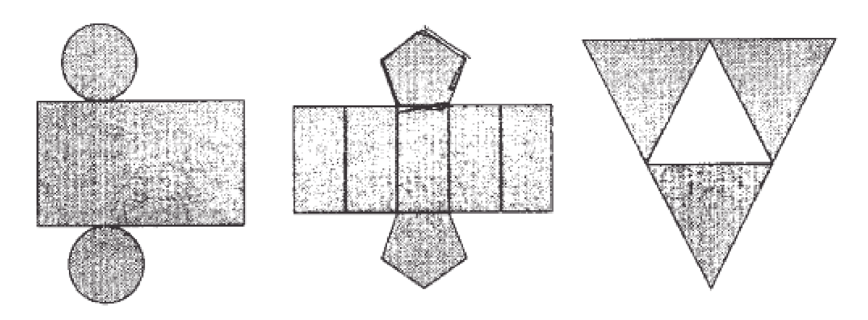
Os pontos A, B, C, D e O do cubo e da pirâmide são os mesmos. O ponto O é central na face superior do cubo. Os quatro cortes saem de O em direção às arestas $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, nessa ordem. Após os cortes, são descartados quatro sólidos.

Os formatos dos sólidos descartados são

A) todos iguais.
B) todos diferentes.
C) três iguais e um diferente.
D) apenas dois iguais.
E) iguais dois a dois.

23 (ENEM 2012)

Maria quer inovar em sua loja de embalagens e decidiu vender caixas com diferentes formatos. Nas imagens apresentadas estão as planificações dessas caixas.

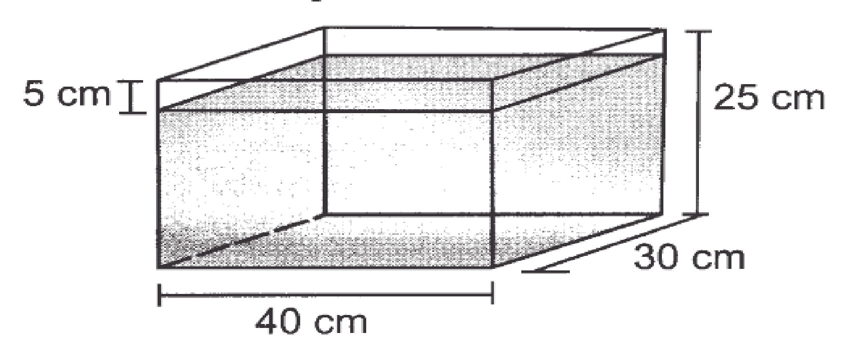


Quais serão os sólidos geométricos que Maria obterá a partir dessas planificações?

- **A** Cilindro, prisma de base pentagonal e pirâmide.
- **B** Cone, prisma de base pentagonal e pirâmide.
- **C** Cone, tronco de pirâmide e pirâmide.
- **D** Cilindro, tronco de pirâmide e prisma.
- **E** Cilindro, prisma e tronco de cone.

24) (ENEM 2012)

Alguns objetos, durante a sua fabricação, necessitam passar por um processo de resfriamento. Para que isso ocorra, uma fábrica utiliza um tanque de resfriamento, como mostrado na figura.

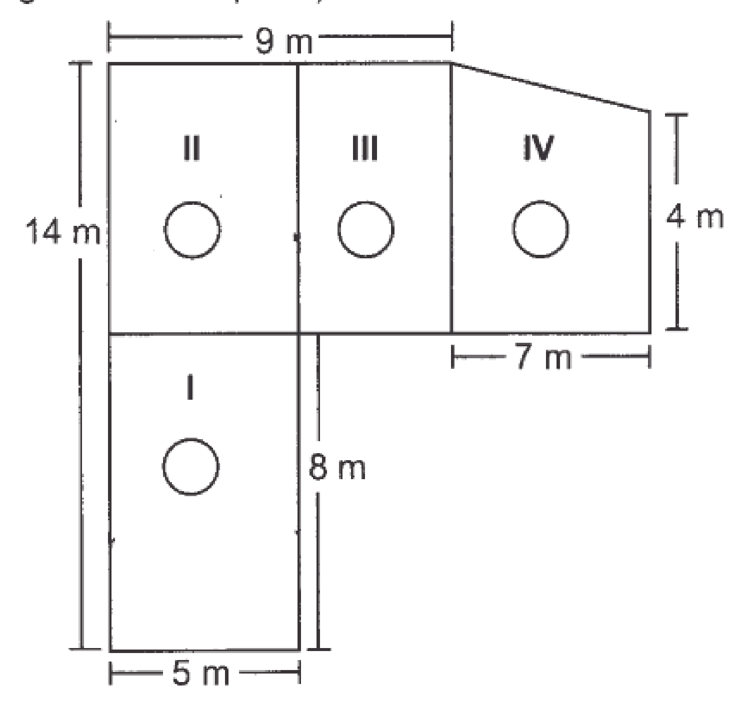


O que aconteceria com o nível da água se colocássemos no tanque um objeto cujo volume fosse de 2 400 cm^3?

- **A** O nível subiria 0,2 cm, fazendo a água ficar com 20,2 cm de altura.
- **B** O nível subiria 1 cm, fazendo a água ficar com 21 cm de altura.
- **C** O nível subiria 2 cm, fazendo a água ficar com 22 cm de altura.
- **D** O nível subiria 8 cm, fazendo a água transbordar.
- **E** O nível subiria 20 cm, fazendo a água transbordar.

25) (ENEM 2012)

Jorge quer instalar aquecedores no seu salão de beleza para melhorar o conforto dos seus clientes no inverno. Ele estuda a compra de unidades de dois tipos de aquecedores: modelo A, que consome 600 g/h (gramas por hora) de gás propano e cobre 35 m² de área, ou modelo B, que consome 750 g/h de gás propano e cobre 45 m² de área. O fabricante indica que o aquecedor deve ser instalado em um ambiente com área menor do que a da sua cobertura. Jorge vai instalar uma unidade por ambiente e quer gastar o mínimo possível com gás. A área do salão que deve ser climatizada encontra-se na planta seguinte (ambientes representados por três retângulos e um trapézio).

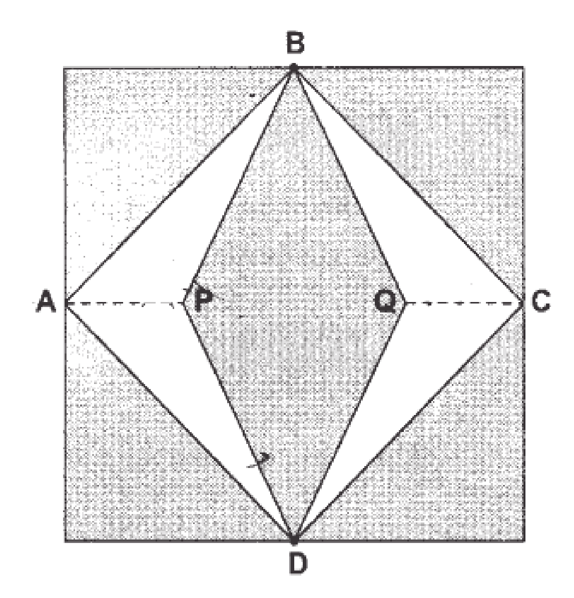


Avaliando-se todas as informações, serão necessários

- **A** quatro unidades do tipo A e nenhuma unidade do tipo B.
- **B** três unidades do tipo A e uma unidade do tipo B.
- **C** duas unidades do tipo A e duas unidades do tipo B
- **D** uma unidade do tipo A e três unidades do tipo B.
- **E** nenhuma unidade do tipo A e quatro unidades do tipo B.

26) (ENEM 2012)

Para decorar a fachada de um edifício, um arquiteto projetou a colocação de vitrais compostos de quadrados de lado medindo 1 m, conforme a figura a seguir.



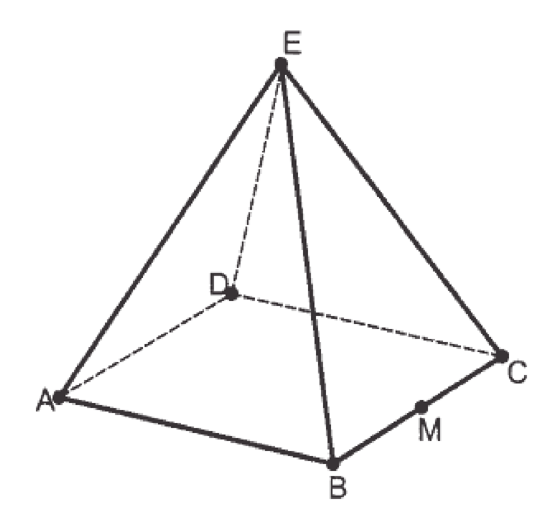
Nesta figura, os pontos A, B, C e D são pontos médios dos lados do quadrado e os segmentos AP e QC medem 1/4 da medida do lado do quadrado. Para confeccionar um vitral, são usados dois tipos de materiais: um para a parte sombreada da figura, que custa R$ 30,00 o m^2, e outro para a parte mais clara (regiões ABPDA e BCDQB), que custa R$ 50,00 o m^2.

De acordo com esses dados, qual é o custo dos materiais usados na fabricação de um vitral?

- (A) R$ 22,50
- (B) R$ 35,00
- (C) R$ 40,00
- (D) R$ 42,50
- (E) R$ 45,00

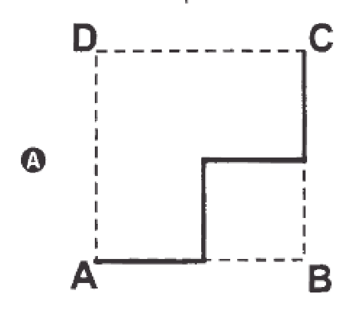
27) (ENEM 2012)

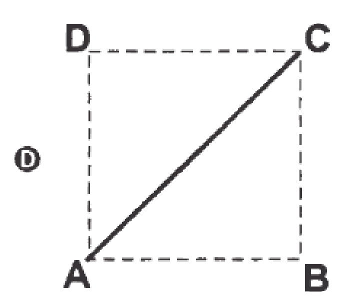
João propôs um desafio a Bruno, seu colega de classe: ele iria descrever um deslocamento pela pirâmide a seguir e Bruno deveria desenhar a projeção desse deslocamento no plano da base da pirâmide.

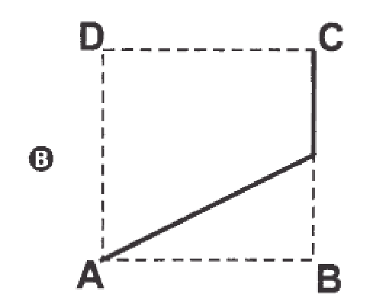


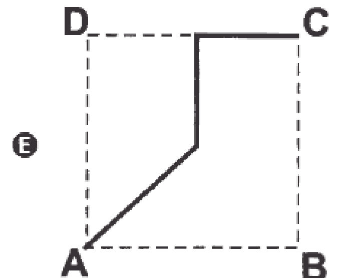
O deslocamento descrito por João foi: mova-se pela pirâmide, sempre em linha reta, do ponto A ao ponto E, a seguir do ponto E ao ponto M, e depois de M a C.

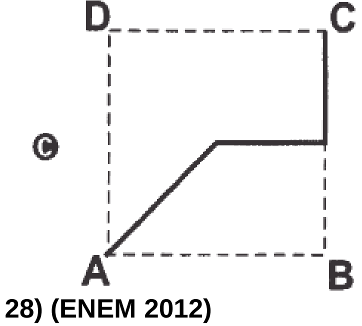
O desenho que Bruno deve fazer é

Ⓐ 

Ⓓ 

Ⓑ 

Ⓔ 



28) (ENEM 2012)

O losango representado na Figura 1 foi formado pela união dos centros das quatro circunferências tangentes, de raios de mesma medida.

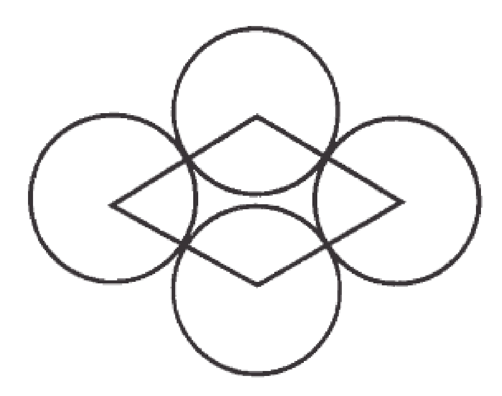


Figura 1

Dobrando-se o raio de duas das circunferências centradas em vértices opostos do losango e ainda mantendo-se a configuração das tangências, obtém-se uma situação conforme ilustrada pela Figura 2.

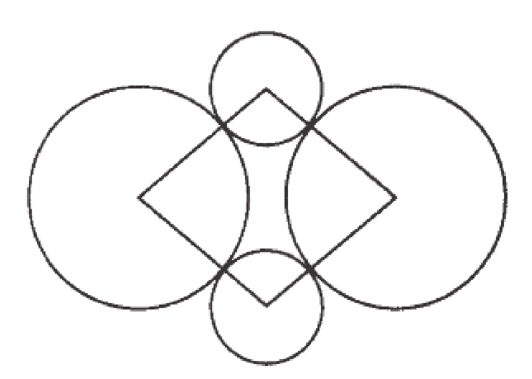


Figura 2

O perímetro do losango da Figura 2, quando comparado ao perímetro do losango da Figura 1, teve um aumento de

Ⓐ 300%.
Ⓑ 200%.
Ⓒ 150%.
Ⓓ 100%.
Ⓔ 50%.

29) - (ENEM/2009)

Um artesão construiu peças de artesanato interceptando uma pirâmide de base quadrada com um plano. Após fazer um estudo das diferentes peças que poderia obter, ele concluiu que uma delas poderia ter uma das faces pentagonal.

Qual dos argumentos a seguir justifica a conclusão do artesão?

a) Uma pirâmide de base quadrada tem 4 arestas laterais e a interseção de um plano com a pirâmide intercepta suas arestas laterais. Assim, esses pontos formam um polígono de 4 lados.
b) Uma pirâmide de base quadrada tem 4 faces triangulares e, quando um plano intercepta essa pirâmide, divide cada face em um triângulo e um trapézio. Logo, um dos polígonos tem 4 lados.
c) Uma pirâmide de base quadrada tem 5 faces e a interseção de uma face com um plano é um segmento de reta. Assim, se o plano interceptar todas as faces, o polígono obtido nessa interseção tem 5 lados.
d) O número de lados de qualquer polígono obtido como interseção de uma pirâmide com um plano é igual ao número de faces da pirâmide. Como a pirâmide tem 5 faces, o polígono tem 5 lados.
e) O número de lados de qualquer polígono obtido interceptando-se uma pirâmide por um plano é igual ao número de arestas laterais da pirâmide. Como a pirâmide tem 4 arestas laterais, o polígono tem 4 lados.

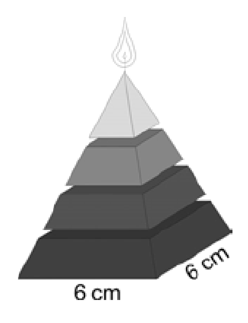
30) - (ENEM/2009)

Uma empresa que fabrica esferas de aço, de 6 cm de raio, utiliza caixas de madeira, na forma de um cubo, para transportá-las.
Sabendo que a capacidade da caixa é de 13.824 cm^3, então o número máximo de esferas que podem ser transportadas em uma caixa é igual a

a) 4.
b) 8.
c) 16
d) 24.
e) 32.

31) - (ENEM/2009)

Uma fábrica produz velas de parafina em forma de pirâmide quadrangular regular com 19 cm de altura e 6 cm de aresta da base. Essas velas são formadas por 4 blocos de mesma altura — 3 troncos de pirâmide de bases paralelas e 1 pirâmide na parte superior —, espaçados de 1 cm entre eles, sendo que a base superior de cada bloco é igual à base inferior do bloco sobreposto, com uma haste de ferro passando pelo centro de cada bloco, unindo-os, conforme a figura.



Se o dono da fábrica resolver diversificar o modelo, retirando a pirâmide da parte superior, que tem 1,5 cm de aresta na base, mas mantendo o mesmo molde, quanto ele passará a gastar com parafina para fabricar uma vela?

a) 156 cm^3.
b) 189 cm^3.
c) 192 cm^3.
d) 216 cm^3.
e) 540 cm^3.

32) - (ENEM/2009)

A cisterna é um recipiente utilizado para armazenar água da chuva. Os principais critérios a serem observados para captação e armazenagem de água da chuva são: a demanda diária de água na propriedade; o índice médio de precipitação (chuva), por região, em cada período do ano; o tempo necessário para armazenagem; e a área de telhado necessária ou disponível para captação.
Para fazer o cálculo do volume de uma cisterna, deve-se acrescentar um adicional relativo ao coeficiente de evaporação. Na dificuldade em se estabelecer um coeficiente confiável, a Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária (EMBRAPA) sugere que sejam adicionados 10% ao volume calculado de água.
Desse modo, o volume, em m^3, de uma cisterna é calculado por $V_c = V_d \times N_{dia}$, em que V_d = volume de demanda da água diária (m^3), N_{dia} = número de dias de armazenagem, e este resultado deve ser acrescido de 10%.
Para melhorar a qualidade da água, recomenda-se que a captação seja feita somente nos telhados das edificações.
Considerando que a precipitação de chuva de 1 mm sobre uma área de 1 m^2 produz 1 litro de água, pode-se calcular a área de um telhado a fim de atender a necessidade de armazenagem da seguinte maneira: área do telhado (em m^2) = volume da cisterna (em litros)/precipitação.

Disponível em: www.cnpsa.embrapa.br.
Acesso em: 8 jun. 2009 (adaptado).

Para atender a uma demanda diária de 2.000 litros de água, com período de armazenagem de 15 dias e precipitação média de 110 mm, o telhado, retangular, deverá ter as dimensões mínimas de

a) 6 metros por 5 metros, pois assim teria uma área de 30 m^2.
b) 15 metros por 20 metros, pois assim teria uma área de 300 m^2.
c) 50 metros por 60 metros, pois assim teria uma área de 3.000 m^2.
d) 91 metros por 30 metros, pois assim teria uma área de 2.730 m^2.
e) 110 metros por 30 metros, pois assim teria uma área de 3.300 m^2.

33) - (ENEM/2010)

Para construir uma manilha de esgoto, um cilindro com 2 m de diâmetro e 4 m de altura (de espessura desprezível), foi envolvido homogeneamente por uma camada de concreto, contendo 20 cm de espessura.
Supondo que cada metro cúbico de concreto custe R$ 10,00 e tomando 3,1 como valor aproximado de π, então o preço dessa manilha é igual a

a) R$ 230,40.
b) R$ 124,00.
c) R$104,16.
d) R$ 54,56.
e) R$ 49,60.

34) - (ENEM/2010)

A disparidade de volume entre os planetas é tão grande que seria possível colocá-los uns dentro dos outros. O planeta Mercúrio é o menor de todos. Marte é o segundo menor: dentro dele cabem três Mercúrios. Terra é o único com vida: dentro dela cabem sete Martes. Netuno é o quarto maior: dentro dele cabem 58 Terras. Júpiter é o maior dos planetas: dentro dele cabem 23 Netunos.

Revista Veja. Ano 41, nº 26, 25 jun. 2008 (adaptado)

Seguindo o raciocínio proposto, quantas Terras cabem dentro de Júpiter?

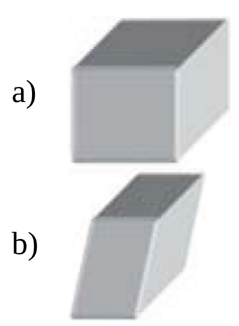
a) 406
b) 1 334
c) 4 002
d) 9 338
e) 28 014

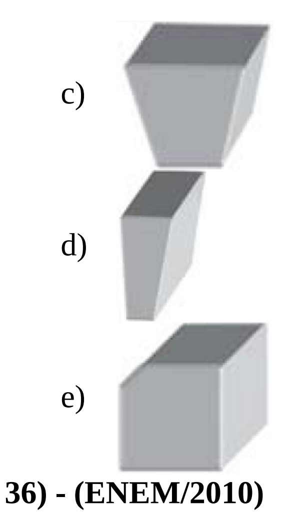
35) - (ENEM/2010)

Para confeccionar, em madeira, um cesto de lixo que comporá o ambiente decorativo de uma sala de aula, um marceneiro utilizará, para as faces laterais, retângulos e trapézios isósceles e, para o fundo, um quadrilátero, com os lados de mesma medida e ângulos retos.

Qual das figuras representa o formato de um cesto que possui as características estabelecidas?

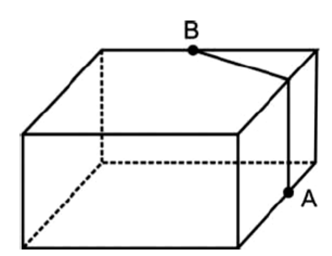
a)
b)





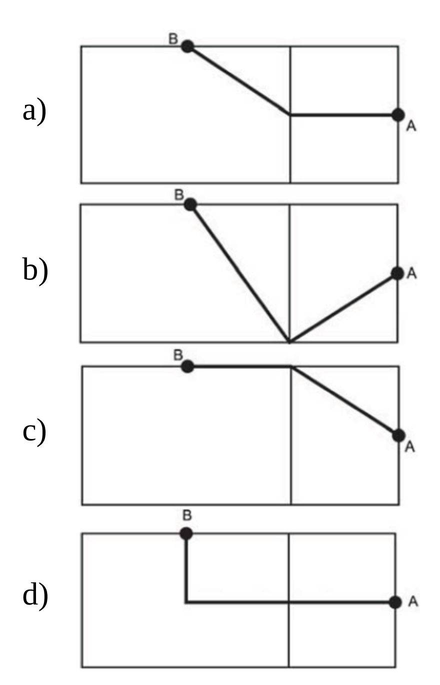
36) - (ENEM/2010)

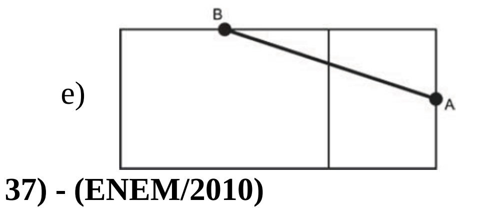
A figura seguinte ilustra um salão de um clube onde estão destacados os pontos A e B.



Nesse salão, o ponto em que chega o sinal da TV a cabo fica situado em A. A fim de instalar um telão para a transmissão dos jogos de futebol da Copa do Mundo, esse sinal deverá ser levado até o ponto B por meio de um cabeamento que seguirá na parte interna da parede e do teto.

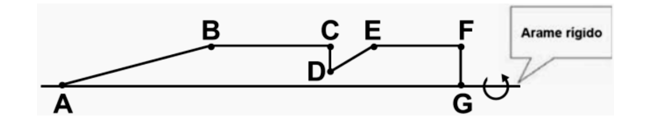
O menor comprimento que esse cabo deverá ter para ligar os pontos A e B poderá ser obtido por meio da seguinte representação no plano:



e) 

37) - (ENEM/2010)

Numa feira de artesanato, uma pessoa constrói formas geométricas de aviões, bicicletas, carros e outros engenhos com arame inextensível. Em certo momento, ele construiu uma forma tendo como eixo de apoio outro arame retilíneo e rígido, cuja aparência é mostrada na figura seguinte:



Ao girar tal forma em torno do eixo, formou-se a imagem de um foguete, que pode ser pensado como composição, por justaposição, de diversos sólidos básicos de revolução.

Sabendo que, na figura, os pontos B, C, E e F são colineares, AB = 4FG, BC = 3FG, EF = 2FG, e utilizando-se daquela forma de pensar o foguete, a decomposição deste, no sentido da ponta para a cauda, é formada pela seguinte sequência de sólidos:

a) pirâmide, cilindro reto, cone reto, cilindro reto.
b) cilindro reto, tronco de cone, cilindro reto, cone equilátero.
c) cone reto, cilindro reto, tronco de cone e cilindro equilátero.
d) cone equilátero, cilindro reto, pirâmide, cilindro.
e) cone, cilindro equilátero, tronco de pirâmide, cilindro.

38) - (ENEM/2010)

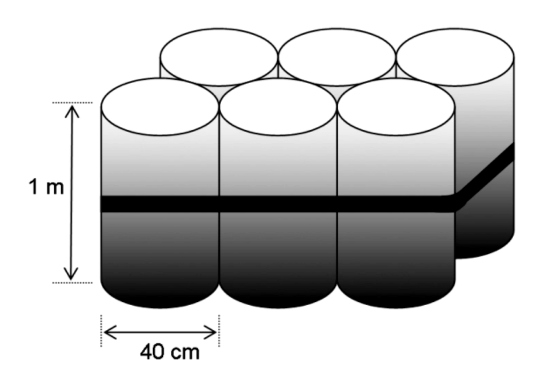
Uma empresa de refrigerantes, que funciona sem interrupções, produz um volume constante de 1 800 000 cm^3 de líquido por dia. A máquina de encher garrafas apresentou um defeito durante 24 horas. O inspetor de produção percebeu que o líquido chegou apenas à altura de 12 cm dos 20 cm previstos em cada garrafa. A parte inferior da garrafa em que foi depositado o líquido tem forma cilíndrica com raio da base de 3 cm. Por questões de higiene, o líquido já engarrafado não será reutilizado.

Utilizando $\pi \cong 3$, no período em que a máquina apresentou defeito, aproximadamente quantas garrafas foram utilizadas?

a) 555
b) 5 555
c) 1 333
d) 13 333
e) 133 333

39) - (ENEM/2010)

O administrador de uma cidade, implantando uma política de reutilização de materiais descartados, aproveitou milhares de tambores cilíndricos dispensados por empresas da região e montou *kits* com seis tambores para o abastecimento de água em casas de famílias de baixa renda, conforme a figura seguinte. Além disso, cada família envolvida com o programa irá pagar somente R$ 2,50 por metro cúbico utilizado.

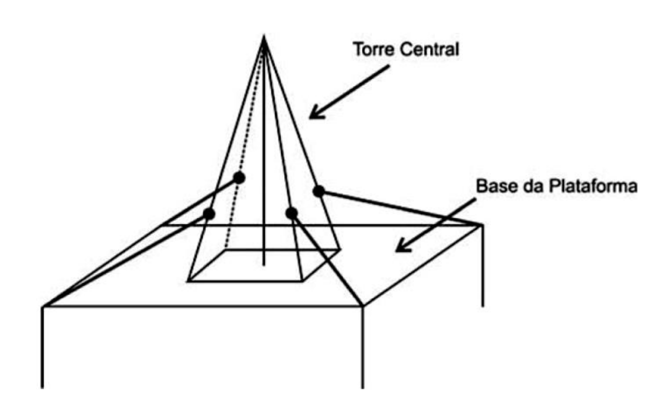


Uma família que utilizar 12 vezes a capacidade total do *kit* em um mês pagará a quantia de
(considere $\pi \cong 3$)

a) R$ 86,40.
b) R$ 21,60.
c) R$ 8,64.
d) R$ 7,20.
e) R$ 1,80.

40) - (ENEM/2010)

Devido aos fortes ventos, uma empresa exploradora de petróleo resolveu reforçar a segurança de suas plataformas marítimas, colocando cabos de aço para melhor afixar a torre central.
Considere que os cabos ficarão perfeitamente esticados e terão uma extremidade no ponto médio das arestas laterais da torre central (pirâmide quadrangular regular) e a outra no vértice da base da plataforma (que é um quadrado de lados paralelos aos lados da base da torre central e centro coincidente com o centro da base da pirâmide), como sugere a ilustração.

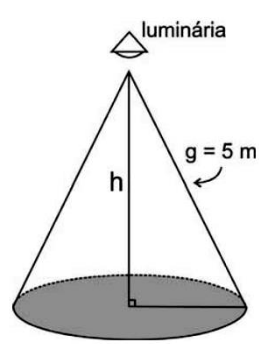


Se a altura e a aresta da base da torre central medem, respectivamente, 24 m e $6\sqrt{2}$ m e o lado da base da plataforma mede $19\sqrt{2}$ m, então a medida, em metros, de cada cabo será igual a

a) $\sqrt{288}$
b) $\sqrt{313}$
c) $\sqrt{328}$
d) $\sqrt{400}$
e) $\sqrt{505}$

41) - (ENEM/2010)

Um arquiteto está fazendo um projeto de iluminação de ambiente e necessita saber a altura que deverá instalar a luminária ilustrada na figura.

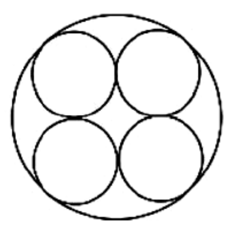


Sabendo-se que a luminária deverá iluminar uma área circular de 28,26 m^2, considerando $\pi \cong 3{,}14$, a altura h será igual a

a) 3 m.
b) 4 m.
c) 5 m.
d) 9 m.
e) 16 m.

42) - (ENEM/2010)

Uma fábrica de tubos acondiciona tubos cilíndricos menores dentro de outros tubos cilíndricos. A figura mostra uma situação em que quatro tubos cilíndricos estão acondicionados perfeitamente em um tubo com raio maior.



Suponha que você seja o operador da máquina que produzirá os tubos maiores em que serão colocados, sem ajustes ou folgas, quatro tubos cilíndricos internos.

Se o raio da base de cada um dos cilindros menores for igual a 6 cm, a máquina por você operada deverá ser ajustada para produzir tubos maiores, com raio da base igual a

a) 12 cm
b) $12\sqrt{2}$ cm
c) $24\sqrt{2}$ cm
d) $6(1 + \sqrt{2})$cm
e) $12(1 + \sqrt{2})$cm

43) - (ENEM/2010)

Um fabricante de creme de leite comercializa seu produto em embalagens cilíndricas de diâmetro da base medindo 4 cm e altura 13,5 cm. O rótulo de cada uma custa R$ 0,60. Esse fabricante comercializará o referido produto em embalagens ainda cilíndricas de mesma capacidade, mas com a medida do diâmetro da base igual à da altura.

Levando-se em consideração exclusivamente o gasto com o rótulo, o valor que o fabricante deverá pagar por esse rótulo é de

a) R$ 0,20, pois haverá uma redução de $\frac{2}{3}$ na superfície da embalagem coberta pelo rótulo.
b) R$ 0,40, pois haverá uma redução de $\frac{1}{3}$ na superfície da embalagem coberta pelo rótulo.
c) R$ 0,60, pois não haverá alteração na capacidade da embalagem.
d) R$ 0,80, pois haverá um aumento de $\frac{1}{3}$ na superfície da embalagem coberta pelo rótulo.
e) R$ 1,00, pois haverá um aumento de $\frac{2}{3}$ na superfície da embalagem coberta pelo rótulo.

44) - (ENEM/2010)

Certa marca de suco é vendida no mercado em embalagens tradicionais de forma cilíndrica. Relançando a marca, o fabricante pôs à venda embalagens menores, reduzindo a embalagem tradicional à terça parte de sua capacidade.
Por questões operacionais, a fábrica que fornece as embalagens manteve a mesma forma, porém reduziu à metade o valor do raio da base da embalagem tradicional na construção da nova embalagem. Para atender à solicitação de redução da capacidade, após a redução no raio, foi necessário determinar a altura da nova embalagem.

Que expressão relaciona a medida da altura da nova embalagem de suco (a) com a altura da embalagem tradicional (*h*)?

a) $a = \frac{h}{12}$

b) $a = \frac{h}{6}$

c) $a = \frac{2h}{3}$

d) $a = \frac{4h}{3}$

e) $a = \frac{4h}{9}$

45) - (ENEM/2011)

O dono de uma oficina mecânica precisa de um pistão das partes de um motor, de 68 mm de diâmetro, para o conserto de um carro. Para conseguir um, esse dono vai até um ferro velho e lá encontra pistões com diâmetros iguais a 68,21 mm; 68,102 mm; 68,001 mm; 68,02 mm e 68,012 mm.

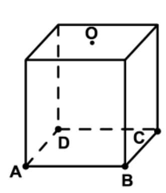
Para colocar o pistão no motor que está sendo consertando, o dono da oficina terá de adquirir aquele que tenha o diâmetro mais próximo do que precisa.

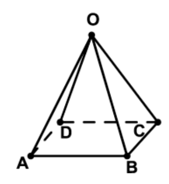
Nessa condição, o dono da oficina deverá comprar o pistão de diâmetro

a) 68,21 mm.
b) 68,102 mm.
c) 68,02 mm.
d) 68,012 mm.
e) 68,001 mm.

46) - (ENEM/2011)

Uma indústria fabrica brindes promocionais em forma de pirâmide. A pirâmide é obtida a partir de quatro cortes em um sólido que tem a forma de um cubo. No esquema, estão indicados o sólido original (cubo) e a pirâmide obtida a partir dele.





Os pontos A, B, C, D e O do cubo e da pirâmide são os mesmos. O ponto O é central na face superior do cubo. Os quatro cortes saem de O em direção às arestas $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, nessa ordem. Após os cortes, são descartados quatro sólidos.

Os formatos dos sólidos descartados são

a) todos iguais.
b) todos diferentes.
c) três iguais e um diferente.
d) apenas dois iguais.
e) iguais dois a dois.

47) - (ENEM/2011)

A figura seguinte mostra um modelo de sombrinha muito usado em países orientais.



Disponível em: http://mdmat.psico.ufrgs.br. Acesso em: 1 maio 2010.

Esta figura é uma representação de uma superfície de revolução chamada de

a) pirâmide.
b) semiesfera.
c) cilindro.
d) tronco de cone.
e) cone.

48) - (ENEM/2011)

É possível usar água ou comida para atrair as aves e observá-las. Muitas pessoas costumam usar água com açúcar, por exemplo, para atrair beija-flores. Mas é importante saber que, na hora de fazer a mistura, você deve sempre usar uma parte de açúcar para cinco partes de água. Além disso, em dias quentes, precisa trocar a água de duas a três vezes, pois com o calor ela pode fermentar e, se for ingerida pela ave, pode deixá-la doente. O excesso de açúcar, ao cristalizar, também pode manter o bico da ave fechado, impedindo-a de se alimentar. Isso pode até matá-la.

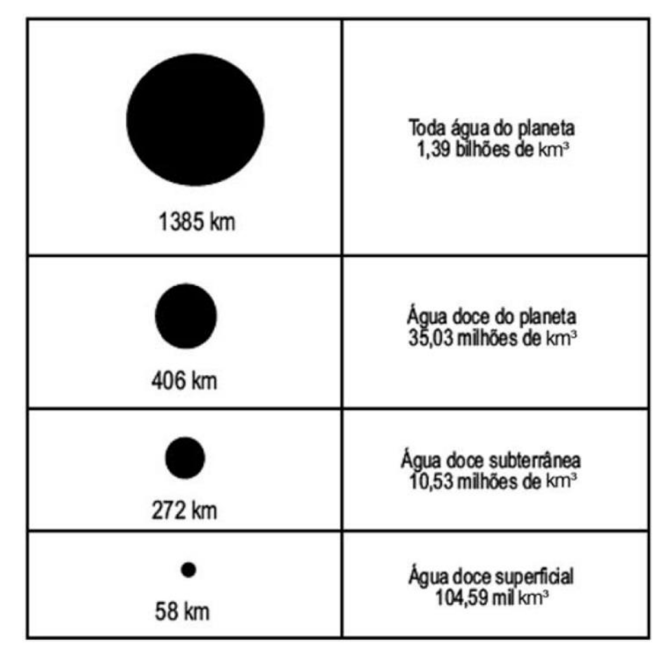
Ciência Hoje das Crianças. FNDE; Instituto Ciência Hoje, ano 19, n. 166, mar. 1996.

Pretende-se encher completamente um copo com a mistura para atrair beija-flores. O copo tem formato cilíndrico, e suas medidas são 10 cm de altura e 4 cm de diâmetro. A quantidade de água que deve ser utilizada na mistura é cerca de (utilize $\pi = 3$)

a) 20 mL.
b) 24 mL.
c) 100 mL.
d) 120 mL.
e) 600 mL.

49) - (ENEM/2010)

Se pudéssemos reunir em esferas toda a água do planeta, os diâmetros delas seriam:



Guia do Estudante: Atualidades e Vestibulares+ENEM. Abril: São Paulo, 2009.

A razão entre o volume da esfera que corresponde à água doce superficial e o volume da esfera que corresponde à água doce do planeta é

a) $\frac{1}{343}$
b) $\frac{1}{49}$
c) $\frac{1}{7}$
d) $\frac{29}{136}$
e) $\frac{136}{203}$

50) - (ENEM/2012)

A cerâmica possui a propriedade da contração, que consiste na evaporação da água existente em um conjunto ou bloco cerâmico submetido a uma determinada temperatura elevada: em seu lugar aparecendo “espaços vazios” que tendem a se aproximar. No lugar antes ocupado pela água vão ficando lacunas e, consequentemente, o conjunto tende a retrair-se. Considere que no processo de cozimento a cerâmica de argila sofra uma contração, em dimensões lineares, de 20%.

Disponível em: www.arq.ufsc.br. Acesso em: 30 mar. 2012 (adaptado).

Levando em consideração o processo de cozimento e a contração sofrida, o volume V de uma travessa de argila, de forma cúbica de aresta a, diminui para um valor que é

a) 20% menor que V, uma vez que o volume do cubo é diretamente proporcional ao comprimento de seu lado.
b) 36% menor que V, porque a área da base diminui de a^2 para $((1 – 0,2)a)^2$.
c) 48,8% menor que V, porque o volume diminui de a^3 para $(0,8a)^3$.
d) 51,2% menor que V, porque cada lado diminui para 80% do comprimento original.
e) 60% menor que V, porque cada lado diminui 20%.

51) - (ENEM/2012)

O globo da morte é uma atração muito usada em circos. Ele consiste em uma espécie de jaula em forma de uma superfície esférica feita de aço, onde motoqueiros andam com suas motos por dentro. A seguir, tem-se, na Figura 1, uma foto de um globo da morte e, na Figura 2, uma esfera que ilustra um globo da morte.

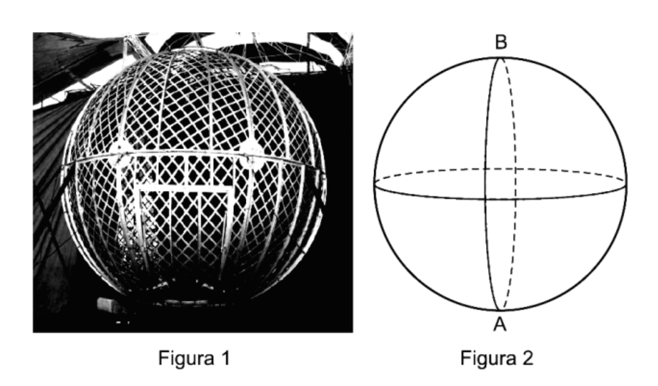
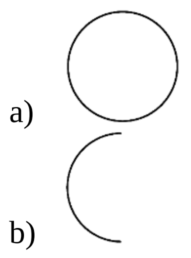


Figura 1 Figura 2

Na Figura 2, o ponto A está no plano do chão onde está colocado o globo da morte e o segmento AB passa pelo centro da esfera e é perpendicular ao plano do chão. Suponha que há um foco de luz direcionado para o chão colocado no ponto B e que um motoqueiro faça um trajeto dentro da esfera, percorrendo uma circunferência que passa pelos pontos A e B.

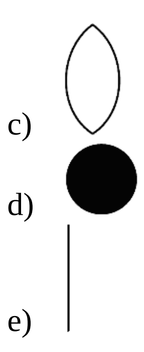
Disponível em: www.baixaki.com.br. Acesso em: 29 fev. 2012.

A imagem do trajeto feito pelo motoqueiro no plano do chão é melhor representada por



a)

b)



c)

d)

e)

52) - (ENEM/2012)

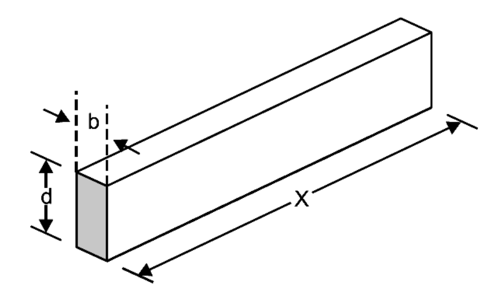
Em exposições de artes plásticas, é usual que estátuas sejam expostas sobre plataformas giratórias. Uma medida de segurança é que a base da escultura esteja integralmente apoiada sobre a plataforma. Para que se providencie o equipamento adequado, no caso de uma base quadrada que será fixada sobre uma plataforma circular, o auxiliar técnico do evento deve estimar a medida R do raio adequado para a plataforma em termos da medida L do lado da base da estátua.

Qual relação entre R e L o auxiliar técnico deverá apresentar de modo que a exigência de segurança seja cumprida?

a) $R \geq L/\sqrt{2}$
b) $R \geq 2L/\pi$
c) $R \geq L/\sqrt{\pi}$
d) $R \geq L/2$
e) $R \geq L/(2\sqrt{2})$

53) - (ENEM/2012)

A resistência mecânica S do uma viga de madeira, em forma de um paralelepípedo retângulo, é diretamente proporcional à largura (b) e ao quadrado de sua altura (d) e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre os suportes da viga, que coincide com o seu comprimento (x), conforme ilustra a figura. A constante de proporcionalidade k é chamada de resistência da viga.



A expressão que traduz a resistência S dessa viga de madeira é

a) $S = \dfrac{k \cdot b \cdot d^2}{x^2}$

b) $S = \dfrac{k \cdot b \cdot d}{x^2}$

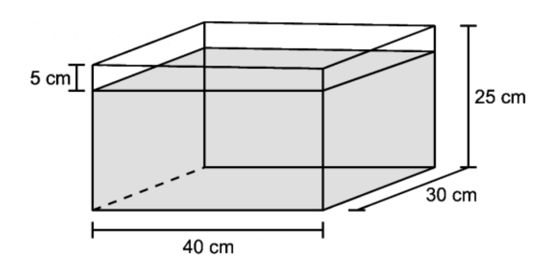
c) $S = \frac{k \cdot b \cdot d^2}{x}$

e) $S = \frac{k \cdot b \cdot 2d}{x}$

d) $S = \frac{k \cdot b^2 \cdot d}{x}$

54) - (ENEM/2012)

Alguns objetos, durante a sua fabricação, necessitam passar por um processo de resfriamento. Para que isso ocorra, uma fábrica utiliza um tanque de resfriamento, como mostrado na figura.



O que aconteceria com o nível da água se colocássemos no tanque um objeto cujo volume fosse de 2 400 cm^3?

a) O nível subiria 0,2 cm, fazendo a água ficar com 20,2 cm de altura.
b) O nível subiria 1 cm, fazendo a água ficar com 21 cm de altura.
c) O nível subiria 2 cm, fazendo a água ficar com 22 cm de altura.
d) O nível subiria 8 cm, fazendo a água transbordar.
e) O nível subiria 20 cm, fazendo a água transbordar.

Gabarito enem:

1) e **2)** d **3)** b **4)** c **5)** e **6)** d **7)** b **8)** b **9)** b **10)** b

11) d **12)** b **13)** e **14)** b **15)** b **16)** a **17)** a **18)** d **19)** d
20) b **21)** d **22)** e **23)** a **24)** c **25)** c **26)** b **27)** c **28)** e
29) c **30) b 31) b 32) b 33) d 34) b 35) c 36) e 37) c 38) b**

39) b 40) d 41) b 42) d 43) b 44) d 45)e 46) e 47) e 48)c

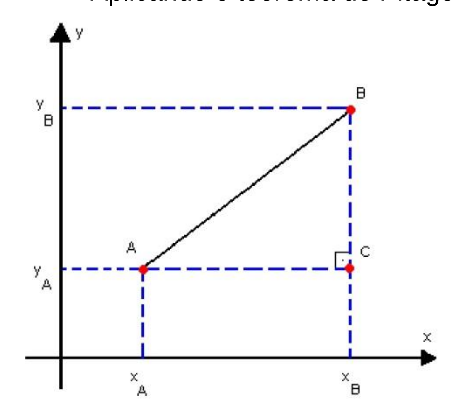
49) a 50) c 51) e 52) a 53) a 54) c

GEOMETRIA ANALÍTICA

Teoria

Distância entre Dois Pontos

Sejam os pontos **A**(x_A, y_A) e **B**(x_B, y_B) e sendo **d(A, B)** a distância entre eles, temos:
Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo ABC, vem:



$[d(A, B)]^2 = (AC)^2 + (BC)^2$

$[d(A, B)]^2 = (X_b - X_a)^2 + (Y_b - Y_a)^2$

$d(A, B) = \sqrt{(X_b - X_a)^2 + (Y_b - Y_a)^2}$

Exemplos

1) São dados A (3, -1), B (1, 1) e C (5, 5)

   a) Calcule o perímetro do triângulo ABC.
   b) Mostre que ABC é um triângulo retângulo

2) Obtenha o ponto P do eixo das ordenadas que dista 10 unidades do ponto Q (6, -5).

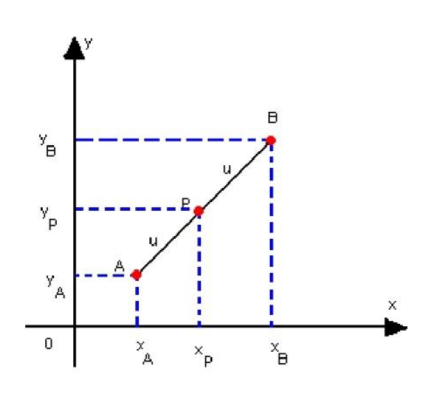
3) Qual é o ponto P, pertence ao eixo das abscissas, que dista 13 unidades do ponto Q (-8, 5)?

Ponto Médio

Dados os pontos A(x_A, y_A), B(x_B, y_B) e P, que divide $\overline{AB}$ ao meio, temos:

Note que o ponto P é o ponto médio do segmento AB, com isso suas coordenadas serão as coordenadas médias dos pontos A e B. Veja:

$$P\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$



Exemplos

1) Determine o ponto médio do segmento com extremidades A (4, 6) e B (8, 10)

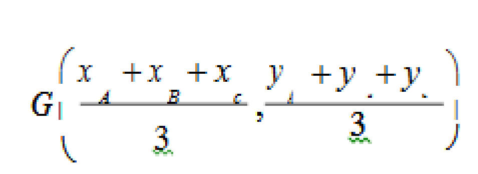
2) Determine o simétrico de A (3, 8) em relação ao ponto Q (-2, 1)

3) Dois vértices consecutivos de um paralelogramo ABCD são os pontos A (2, 3) e B (5, 4). O ponto de interseção das diagonais AC e BD é Q (4, 6). Obtenha C e D. (sugestão: o ponto comum as diagonais de um paralelogramo é ponto médio de cada uma delas)

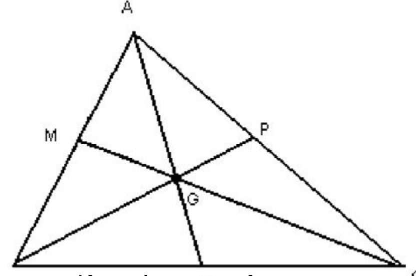
Baricentro de um triângulo

Seja o triângulo com vértices A, B e C, em que M, N e P são os pontos médios dos lados $\overline{AB}, \overline{BC}$ e $\overline{CA}$, respectivamente. Portanto, $\overline{AN}, \overline{BP}$ e $\overline{CM}$ são as medianas desse triângulo:

Chamamos de baricentro, e denotamos por G, o encontro das medianas de um triângulo. As coordenas do ponto G são dadas por:



$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$



Exemplos

1) Encontre as coordenas do baricentro de um triângulo que têm como coordenadas os pontos A(1, 2), B(-2, 5) e C(5, -3).

Condições de alinhamento de três pontos e Área de um Triângulo

Dados três pontos quaisquer, $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ no plano cartesiano, ocorre apenas uma das duas situações:

I – Os três pontos estão alinhados II – São Vértices de um triângulo

Se os pontos estiverem alinhados temos que :

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Por outro lado, se os pontos não estiverem alinhados, a área do triângulo determinado por eles é dada por:

$$A = \frac{1}{2}|D|$$

Exemplos

1) Verificar se os pontos A (2, 5), B (3, 7) e C (5, 11) são ou não colineares.

2) Determinar **a** de modo que os pontos A(4, 2), B(5, 8) e C(3, a) sejam colineares.
3) A área do triângulo cujos vértices são (1, 0), (3, 4) e (4, -1) é igual a:

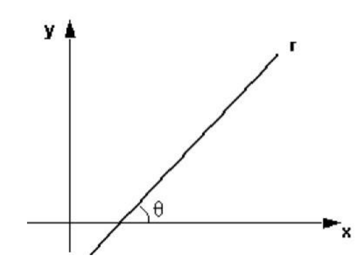
4) Um valor de K, de modo que a área do triângulo determinado pelos pontos A(0, 1), B(-2, 4) e C(K, K – 1) seja 10 unidades é:

5) Determine a área da região do plano limitada pelas retas y = 3x, x + y = 4 e y = 0.

Coeficiente Angular

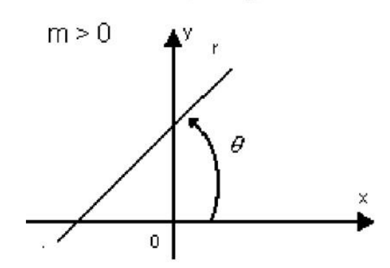
Dada uma reta r qualquer, definimos como coeficiente angular dessa reta, a tangente do ângulo formado entre a reta e o eixo das abscissas.

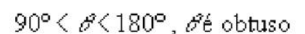
$$m = tg\theta$$

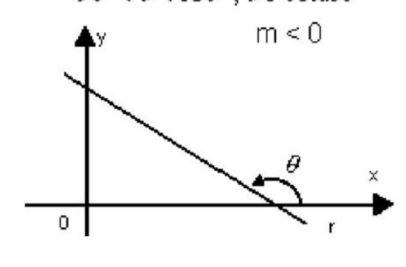


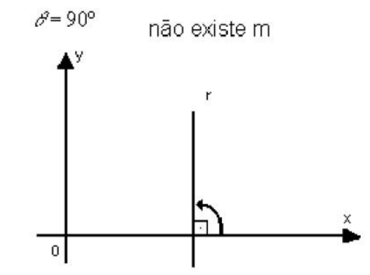
No caso mostrado acima se tem que m é positivo, mas também podem ocorrer as seguintes situações:

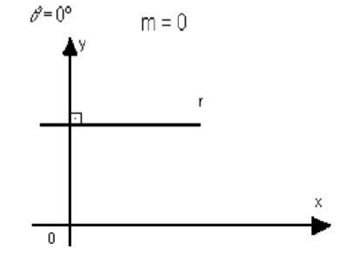
$0° < \theta < 90°$, θ é agudo



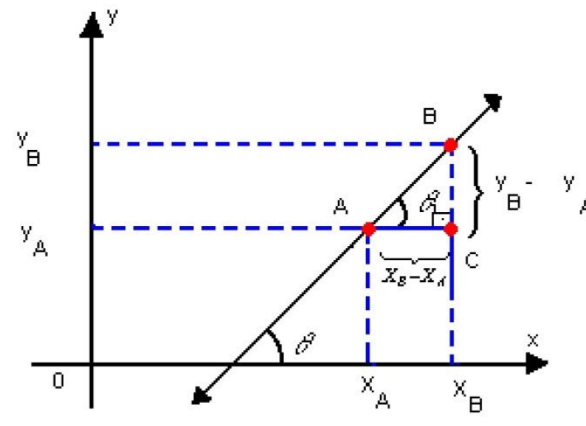








Para determinar o coeficiente angular de uma reta, precisamos de dois pontos que pertençam a esta reta, para assim termos que:



$$m = tg\theta = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

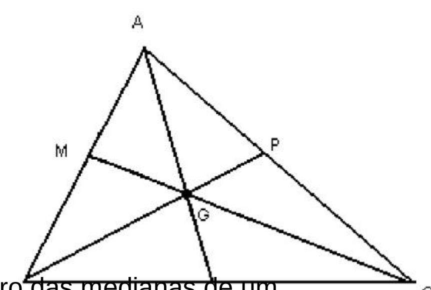
Exemplos

1) Determine a inclinação da reta que passa pelos pontos A (3, 7) e B (5, 9).

2) Calcule o coeficiente angular da reta AB em cada um dos seguintes casos:

a) A (2, 6) e B (4, 14)
b) A (-3, 5) e B (1, -1)
c) A (-5, -1) e B (-3, - 4)

Baricentro de um triângulo



Seja o triângulo com vértices A, B e C, em que M, N e P são os pontos médios dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$, respectivamente. Portanto, $\overline{AN}$, $\overline{BP}$ e $\overline{CM}$ são as medianas desse triângulo:

Chamamos de baricentro, e denotamos por G, o encontro das medianas de um triângulo. As coordenas do ponto G são dadas por:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

Exemplos

Encontre as coordenas do baricentro de um triângulo que têm como coordenadas os pontos A(1, 2), B(-2, 5) e C(5, -3).

Condições de alinhamento de três pontos e Área de um Triângulo

Dados três pontos quaisquer, A(x_A, y_A), B(x_B, y_B) e C(x_C, y_C) no plano cartesiano, ocorre apenas uma das duas situações:

I – Os três pontos estão alinhados   II – São Vértices de um triângulo

Se os pontos estiverem alinhados temos que :

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Por outro lado, se os pontos não estiverem alinhados, a área do triângulo determinado por eles é dada por:

$$A = \frac{1}{2}|D|$$

Exemplos

1) Verificar se os pontos A (2, 5), B (3, 7) e C (5, 11) são ou não colineares.

2) Determinar **a** de modo que os pontos A(4, 2), B(5, 8) e C(3, a) sejam colineares.

3) A área do triângulo cujos vértices são (1, 0), (3, 4) e (4, -1) é igual a:

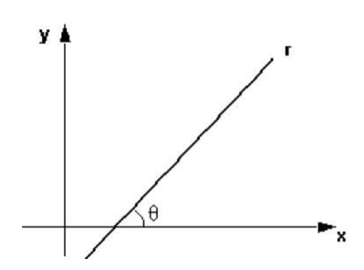
4) Um valor de K, de modo que a área do triângulo determinado pelos pontos A(0, 1), B(-2, 4) e C(K, K – 1) seja 10 unidades é:

5) Determine a área da região do plano limitada pelas retas y = 3x, x + y = 4 e y = 0.

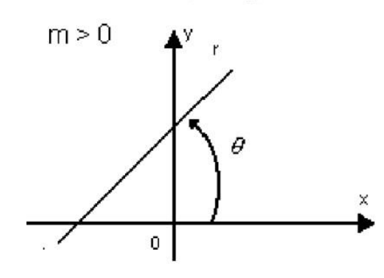
Coeficiente Angular

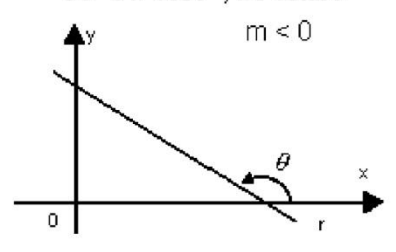
Dada uma reta r qualquer, definimos como coeficiente angular dessa reta, a tangente do ângulo formado entre a reta e o eixo das abscissas.

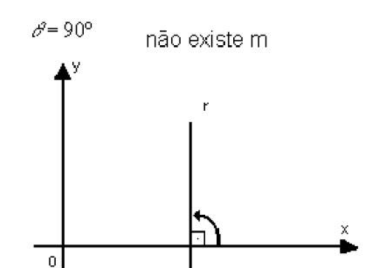
$$m = tg\theta$$

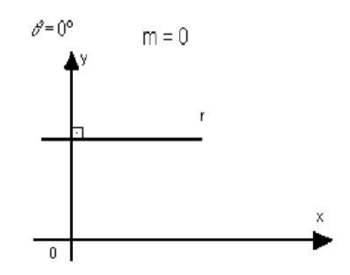


No caso mostrado acima se tem que m é positivo, mas também podem ocorrer as seguintes situações:

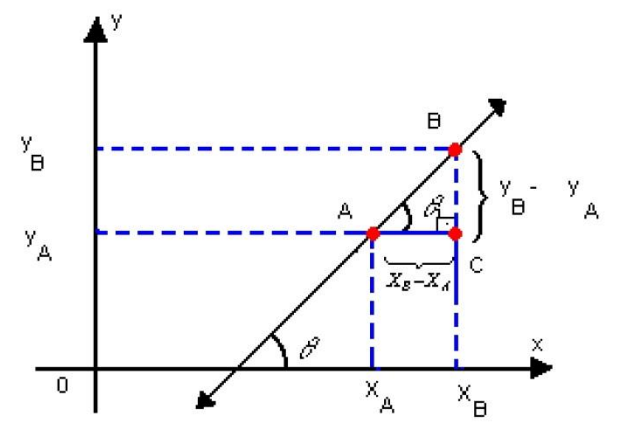








Para determinar o coeficiente angular de uma reta, precisamos de dois pontos que pertençam a esta reta, para assim termos que:



$$m = tg\theta = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Exemplos

1) Determine a inclinação da reta que passa pelos pontos A (3, 7) e B (5, 9).

2) Calcule o coeficiente angular da reta AB em cada um dos seguintes casos:

a) A (2, 6) e B (4, 14)
b) A (-3, 5) e B (1, -1)
c) A (-5, -1) e B (-3, - 4)

Equação Fundamental da Reta

Agora buscaremos uma equação que represente uma reta, para tal utilizaremos a equação fundamental da reta, que é obtida através do coeficiente angular.

Seja **r** uma reta de coeficiente angular **m**. Sendo P(X_0, Y_0), um ponto conhecido da reta r e Q(x, y) um ponto qualquer de r diferente de P, podemos escrever:

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \Leftrightarrow$$

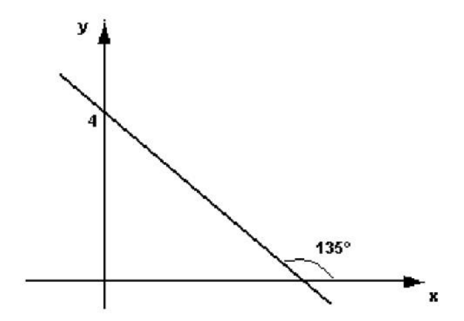
$$(y - y_0) = m\,(x - x_0)$$

Utilizaremos a equação acima como referência para obter uma equação qualquer de uma reta.

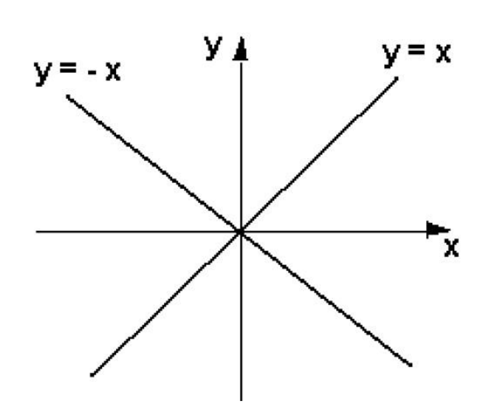
Exemplos

1) Determinar uma equação da reta r que passa pelo ponto P(-2, 1) e tem coeficiente angular m= - 3.

2) Determinar uma equação da reta r do gráfico.
3) Obtenha uma equação da reta que passa pelo ponto A(2, 5) e B(4, 1)



Observação: Duas retas importantes no estudo da geometria analítica são as bissetrizes, dos quadrantes pares e dos quadrantes ímpares.



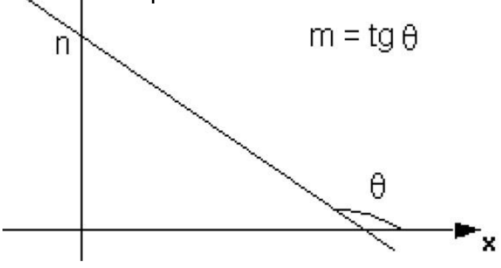
Equação Reduzida da Reta

A equação reduzida da reta é aquela que se encontra na forma:

$$y = mx + n$$

Essa equação é importante pois, além de representar a reta analiticamente deixa explícito os valores de m e n, onde:

- m é o coeficiente angular da reta, ou seja, a tangente que a reta forma com o eixo x.
- n é o chamado coeficiente linear e sua interpretação geométrica é o ponto onde a reta intercepta o eixo das ordenadas.



Equação Geral da Reta

A equação geral da reta, não possui é importante devido a sua aplicabilidade em nenhuma interpretação geométrica relevante, mas algumas expressões analíticas, sua forma:

$$Ax + By + C = 0$$

Exemplos

1) Determinar a equação reduzida e geral da reta que passa pelos pontos A e B nos casos:

a) A(- 2, 3) e B(7, 1)
A(2, 6) e B(- 4, 1)

Retas Concorrentes

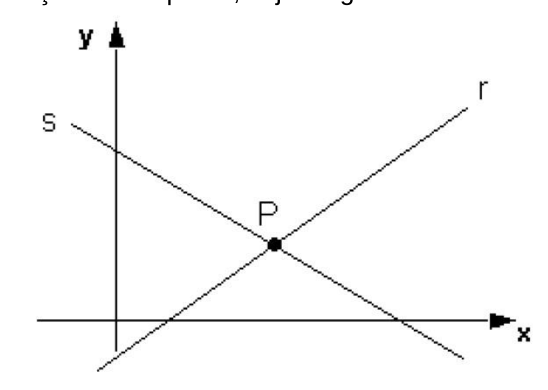
Dadas duas retas em um plano, temos que podem ocorrer dois casos básicos de posição de uma reta em relação a outra:

- As retas são concorrentes - As retas são paralelas

No primeiro caso, o fato de elas serem concorrentes implica que elas possuem um ponto em comum, que chamamos de ponto de interseção das retas, um resultado interessante em Geometria Analítica é a obtenção desse ponto, veja a figura:

Para obtermos o tal ponto P, devemos resolver um sistema em que as equações são as equações das retas concorrentes, assim P é a solução do sistema:

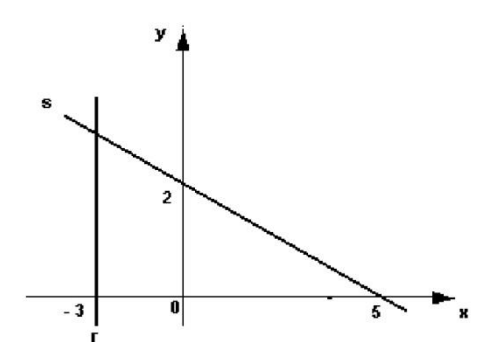
$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A'x + B'y + C' = 0 \end{cases}$$



Exemplos

1) Obtenha o ponto de interseção das retas de equações 2x – y – 5 = 0 e 3x + y –10 = 0

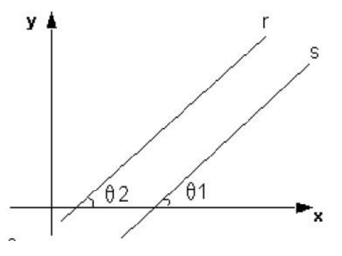
2) Obtenha o ponto de interseção das retas r e s do gráfico



3) Encontre a interseção da reta –3x + 2y = 12 com os eixos coordenados.

Retas Paralelas

A outra posição relativa entre duas retas é o paralelismo, isso ocorre quando as duas retas não têm nenhum ponto em comum, ou seja, não se interceptam.



Veja que nesse caso, o fato das retas não se interceptarem acarreta o fato dos seus coeficientes angulares sem os mesmos, visto que o ângulo formado com o eixo dos x é o mesmo.

Com isso podemos concluir que: se duas retas r e s são paralelas, seus coeficientes angulares serão iguais, ou seja,

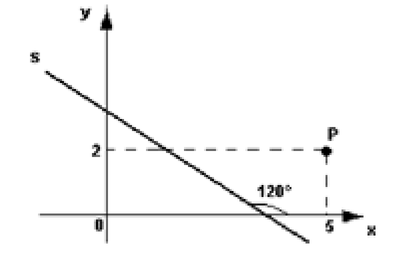
$$m_r = m_s$$

Exemplos

1) São dadas as seguintes retas: r: y = 3x + 5 ; s: y = 3x – 2 ; t: 6x – 2y + 10 = 0 ; u: y = 5x
Descrever a posição relativa entre
a) r e s b) r e t c) s e u

2) Para que valor de **a** as retas r: 3x + 2y – 1 = 0 e s: ax + 5y + 3 = 0 são paralelas?

3) Obter uma equação da reta r que passa pelo ponto P(5, 2) e é paralela à reta s do gráfico.

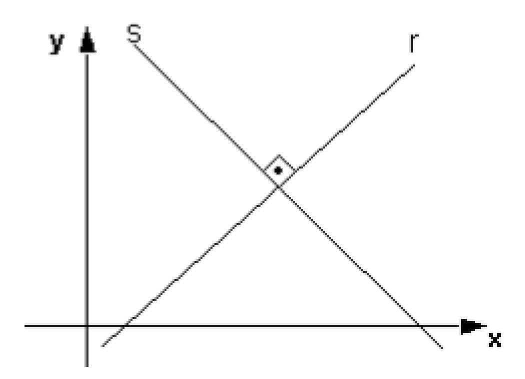


Retas Perpendiculares

Um caso especial de concorrência entre retas é que, quando elas são perpendiculares, ou seja, formam um ângulo de 90° , além de possuírem umponto P de interseção entre elas, existe uma importante relação entre seus coeficientes angulares.

Se r e s são retas perpendiculares, então:

$$m_r . m_s = -1$$



Exemplos

1) Obter uma equação geral da reta s que passa pelo ponto P(2, -3) e é perpendicular a reta r: x + 2y + 5 = 0

2) Qual é a equação reduzida da mediatriz do segmento AB, dados A(3, 9) e B(1,5)?

Determinar o simétrico do ponto P(5, 2) em relação à reta r: 2x + y + 2 = 0

Distância de Ponto a Reta

Seja um ponto $P(x_0, y_0)$ e uma reta r de equação $Ax + By + C = 0$, temos que a distância do ponto P a reta r é dada por:

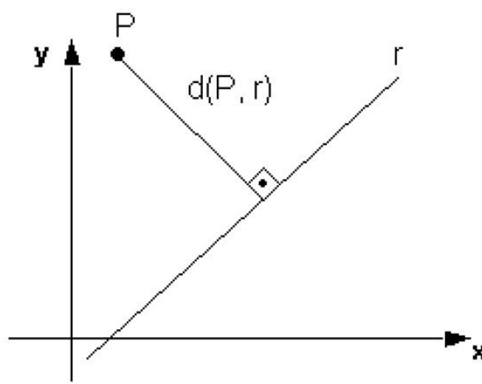
$$d(P, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + c|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

1) Calcular a distância do ponto P(2, 1) à reta r: 3x – 4y + 8 = 0

2) Calcular a distância entre as retas r: 12x+ 5y + 38 = 0 e s: 12x + 5y + 25 = 0

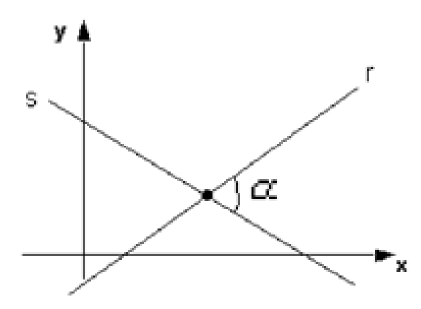
3) Considere os pontos A(0, 0), B(2, 3) e C(4, 1). O comprimento da altura do triângulo ABC, relativa ao lado BC, vale:

Ângulo formado por duas Retas



Definimos o ângulo formado por duas retas, como sendo o menor ângulo gerado por sua interseção. Sendo assim dadas duas retas r e s, de coeficientes angulares m_r e m_s, respectivamente, o ângulo α formado por r e s é calculado por:

$$tg\alpha = \left| \frac{m_r - m_s}{1 + m_r . m_s} \right|$$

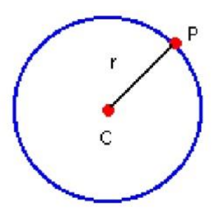


A CIRCUNFERÊNCIA

O Lugar Geométrico

Circunferência é o lugar geométrico dos pontos de um plano que estão a uma mesma distância r de um ponto C fixado, chamado centro da circunferência

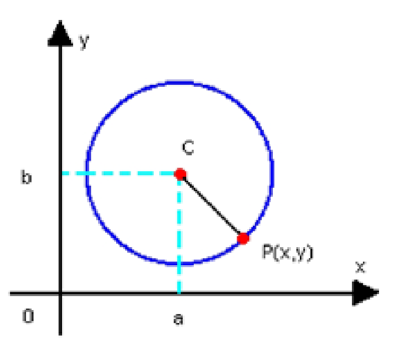
Isso significa que se um ponto qualquer P(x, y), movimentar-se sobre a circunferência, sua coordenadas variarão, mas a distância de P ao centro da circunferência será sempre igual a medida do raio.



Equação Reduzida da Circunferência

Assim, sendo C(a, b) o centro e P(x, y) um ponto qualquer da circunferência, a distância de C a P, denotada por d(C, P), é o raio dessa circunferência. Então:

$$d(P,C) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \Leftrightarrow$$
$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \Leftrightarrow$$
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$



Com isso definimos a equação reduzida da circunferência, como sendo:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Onde C(a, b) é o centro da circunferência e r é o raio da circunferência.
Exemplos

1) Obter a equação reduzida da circunferência de centro C e raio R, nos caso:

   a) C(4, 6) e R = 3

2) Determinar o centro e o raio da circunferência que tem por equação:

a) $(x-6)^2 + (y-2)^2 = 16$ b) $(x+4)^2 + (y-1)^2 = 3$

3) Obter a equação reduzida da circunferência de centro C(3, 2) e que passa pelo ponto (0, 6)

Equação Geral da Circunferência

A equação geral da circunferência é obtida ao efetuarmos os produtos notáveis presentes na equação reduzida e organizando os termos da forma:

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

Fazendo: $\alpha = 2a$, $\beta = 2b$ e $\gamma = a^2 + b^2 - r^2$ temos,

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

Exemplos

1) Obtenha a equação geral da circunferência que passa pelos pontos A(3, 6) e B(4, -1), cujo centro pertence ao eixo das ordenadas.

2) Transforme a equação geral abaixo em equação reduzida e obtenha centro e raio.

a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ b) $x^2 + y^2 + 6 = 0$

c) $3x^2 + 3y^2 - 3x + 6y + 3 = 0$ d) $25x^2 + 25y^2 - 10x - 50y + 1 = 0$

3) Determine a equação da circunferência que passa pelos pontos A(0, 5) e B(1, 0), cujo centro pertence a reta bissetriz dos quadrantes ímpares.

Identificando uma Equação como uma Circunferência

Para que uma equação represente uma circunferência ela deve respeitar dois requisitos básicos:

- Os coeficientes dos termos quadráticos devem ser iguais.
- O raio obtido deve ser maior que zero.

Exemplos

1) Qual é o conjunto dos pontos (x, y) do plano cartesiano tal que $(x-2)^2 + (y-3)^2 = -16$

2) Qual das equações a seguir representa uma circunferência?

a) $x^2 - y^2 + 3x - 6y + 8 = 0$

b) $2x^2 + 3y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 1 = 0$

d) $3x^2 + 3y^2 - 6x + 24y + 24 = 0$

3) (UFRS) A equação $x^2 + y^2 + 4x - 6y + m = 0$ representa uma circunferência se, e somente se:

a) m > 0 b) m < 0 c) m > 13 d) m > -13 e) m < 0

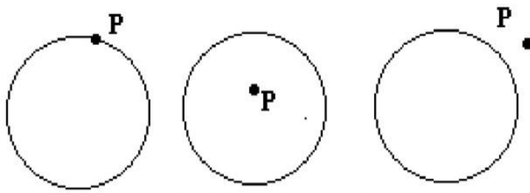
Posição Relativa entre um Ponto e uma Circunferência

Seja uma circunferência λ de centro C, raio r e um ponto P do plano cartesiano, temos que:

$Se\ d(C,P) = r \Leftrightarrow P \in \lambda$

$Se\ d(C,P) < r \Leftrightarrow P\ interior\ a\ r$

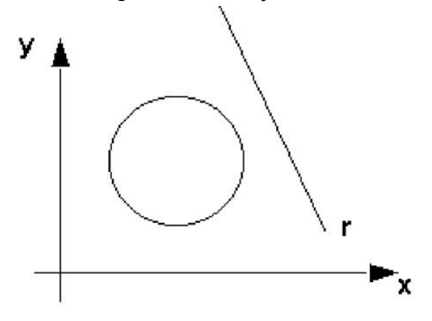
$Se\ d(C,P) > r \Leftrightarrow P\ exterior\ a\ r$



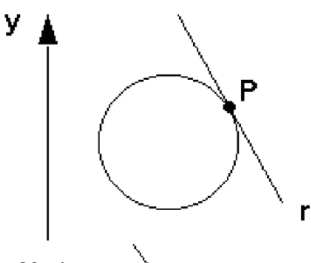
Posição Relativa entre uma Reta e uma Circunferência

Seja uma reta r e uma circunferência λ ,podem ocorrer as seguintes situações:

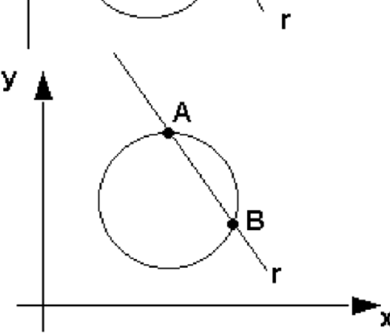
a) $Se\ r \cap \lambda = \varnothing \Leftrightarrow r\ externa\ a\ \lambda$



b) Se $r \cap \lambda = \{P\} \Leftrightarrow r$ tangente a λ



c) Se $r \cap \lambda = \{A, B\} \Leftrightarrow r$ secante a λ



Note que dada uma reta e uma circunferência, elas podem ter um ponto de interseção, dois ou nenhum ponto de interseção. Um resultado importante é determinar se elas são tangentes, secantes ou externas. Para tal devemos resolver um sistema em que as equações são a da reta e a da circunferência e, daí:

- Se o sistema tiver uma única solução, reta e circunferência são tangentes. -

Se o sistema tiver duas soluções, reta e circunferência são secantes.

- Se o sistema não tiver soluções, reta e circunferência são externas.

Exemplos

1) Diga qual é a posição relativa e encontre o ponto de interseção entre a reta e a circunferência, se existir

a) 3x + 4y + 4 = 0 e $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$

b) x – y + 1 = 0 e $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 2$

2) (UFPA) A reta de equação x + 2y = 0 intercepta a circunferência $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 20 = 0$ de centro C, nos pontos A e B. Determine:

a) os pontos A, B e C. A(4, -2), B(-4, 2) e C(-1, -2)
b) A área do triângulo ABC. 10

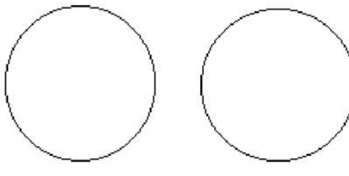
3) (UFRS) O eixo das abscissas determina na circunferência $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 7 = 0$ uma corda de comprimento:

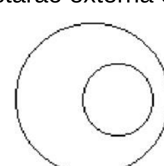
a) $2\sqrt{5}$ b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

Posição Relativa entre Duas Circunferências

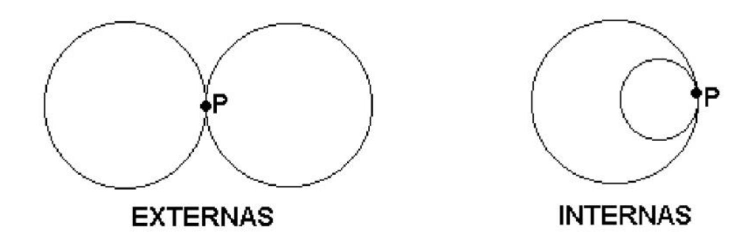
Sejam λ e ρ duas circunferências, temos que:

- $Se\ \lambda \cap \rho = \varnothing \Rightarrow$ as circunferências estarão externa ou interna uma a outra.

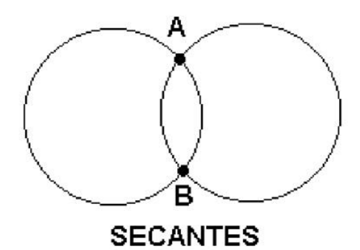




Se $\lambda \cap \rho = \{P\} \Rightarrow$ circunferências estão tangentes, internamente ou as externamente



Se $\lambda \cap \rho = \{A, B\} \Rightarrow$ as circunferências são secantes.



Exemplo

1) Diga se as circunferências de equações $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 2$ e $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 7 = 0$, são tangentes, secantes ou externas e encontre o ponto de interseção.

Sessão Leitura

Nós todos andamos em circulo e não sabemos porque.



Uma pesquisa do Instituto Max Placnk de Cibernética Biológica mostrou que, quando não há um ponto fixo de referência, nos andamos em círculos e, inevitavelmente, acabamos nos perdendo.

Se caminharmos em uma neblina densa, em uma noite sem estrelas, por exemplo, não conseguimos, de jeito nenhum, manter uma trajetória reta – lembrando, novamente, sem usar nenhum ponto de referência.

Isso porque, normalmente, temos uma tendência inexplicável a andar mais para um lado do que para o outro (e o lado varia de pessoa para pessoa). Alguns acreditam que a pessoa anda mais para o lado do cérebro que é dominante. Outros acham que o motivo é mecânico, já que uma perna é sempre mais curta do que a outra.

Seja lá qual for o motivo, não se aventure em um deserto ou uma floresta escura sem uma bússola.

"Às folhas tantas do livro de matemática,
um quociente apaixonou-se um dia doidamente por uma incógnita.
Olhou-a com seu olhar inumerável e viu-a, do ápice à base.
Uma figura ímpar olhos rombóides, boca trapezóide,
corpo ortogonal, seios esferóides.
Fez da sua uma vida paralela a dela até que se encontraram no infinito.
"Quem és tu?" - indagou ele com ânsia radical.
"Eu sou a soma dos quadrados dos catetos,
mas pode me chamar de hipotenusa".
E de falarem descobriram que eram o que, em aritmética,
corresponde a almas irmãs, primos entre si.
E assim se amaram ao quadrado da velocidade da luz
numa sexta potenciação traçando ao sabor do momento e da paixão retas,
curvas, círculos e linhas senoidais.
Nos jardins da quarta dimensão,
escandalizaram os ortodoxos das fórmulas euclidianas
e os exegetas do universo finito.
Romperam convenções Newtonianas e Pitagóricas e, enfim,
resolveram se casar, constituir um lar mais que um lar,
uma perpendicular.
Convidaram os padrinhos:
o poliedro e a bissetriz, e fizeram os planos, equações e diagramas para o futuro,
sonhando com uma felicidade integral e diferencial.
E se casaram e tiveram uma secante e três cones muito engraçadinhos
e foram felizes até aquele dia em que tudo, afinal, vira monotonia.
Foi então que surgiu o máximo divisor comum,
freqüentador de círculos concêntricos viciosos,
ofereceu-lhe,
a ela, uma grandeza absoluta e reduziu-a a um denominador comum.
Ele, quociente percebeu que com ela não formava mais um todo, uma unidade.
Era o triângulo tanto chamado amoroso desse problema,
ele era a fração mais ordinária.
Mas foi então que Einstein descobriu a relatividade
e tudo que era espúrio passou a ser moralidade,
como, aliás, em qualquer Sociedade ..."

http://tudodageometrianalitica.blogspot.com.br/

Fixação

1) (CESGRANRIO) A área do triângulo, cujos vértices são (1,2), (3,4) e (4,-1), é igual a: a) 6 b) 8 c) 9 d) 10 e) 12

2) (CESGRANRIO) O ponto Q é o simétrico do ponto P(x,y) em relação ao eixo dos y. O ponto R é o simétrico do ponto Q em relação à reta y=1. As coordenadas de R são:

a) (x, 1-y) b) (0, 1) c) (-x, 1-y) d) (-x, 2-y) e) (y, -x)

3)(UEL) Seja AC uma diagonal do quadrado ABCD. Se A = (-2, 3) e C = (0, 5), a área de ABCD, em unidades de área, é:

a) 4 b) $4\sqrt{2}$ c) 8 d) $8\sqrt{2}$ e) 16

4) (UNESP) Seja A a intersecção das retas r, de equação y = 2x, e s, de equação y = 4x-2. Se B e C são as intersecções respectivas dessas retas com o eixo das abscissas, a área do triângulo ABC é:

a) ½ b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

5) (PUC) Os pontos A (-1; 1), B (2; -1) e C (0; -4) são vértices consecutivos de um quadrado ABCD. A equação da reta suporte da diagonal BD, desse quadrado, é:

a) x + 5y + 3 = 0 b) x - 2y - 4 = 0 c) x - 5y - 7 = 0

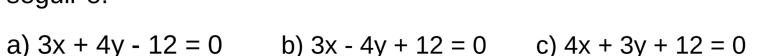
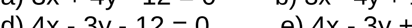
d) x + 2y - 3 = 0 e) x - 3y - 5 = 0

6) (UNITAU) A equação da reta que passa pelos pontos (3,3) e (6,6) é

a) y = x b) y = 3x c) y = 6x d) 2y = x e) 6y = x

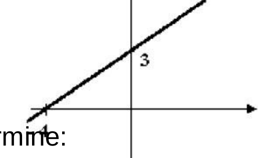
7)(UNICAMP) Calcule a e b positivos na equação da reta ax + by = 6 de modo que ela passe pelo ponto (3,1) e forme com os eixos coordenados um triângulo de área igual 6.

8) (CESGRANRIO) A equação da reta mostrada na figura a seguir é:



a) 3x + 4y - 12 = 0 b) 3x - 4y + 12 = 0 c) 4x + 3y + 12 = 0
d) 4x - 3y - 12 = 0 e) 4x - 3y + 12 = 0



9) (UFES) Dados no plano cartesiano os pontos A (-2,1) e B (0,2), determine:

a) uma equação da reta que passa por A e B; Resp.: y = 1/2 x + 2

b) uma equação da reta que passa por A e é perpendicular ao segmento AB. Resp.: y = - 2x – 3

10) (FATEC) Se A (-1,3) e B (1,1), então a mediatriz do segmento AB encontra a bissetriz dos quadrantes pares no ponto:

a) (-1,1) b) (-3/4, 3/4) c) (-2, 2) d) (-1/2, 1/2) e) (-1/4, 1/4)

11) Considere o triângulo cujos vértices são os pontos A(0,0), B(2,2) e C(2,-2). Se ax + by = c é a equação cartesiana da reta que contém a altura deste triângulo relativa ao lado AB, então 5b/a é:

a) 2 b) 5 c) 7 d) 1 e) 4

12) (UEL) Considere os pontos A(0;0), B(2;3) e C(4;1).A equação da reta paralela à reta AC, conduzida pelo ponto B, é:

a) x - 4y + 10 = 0 b) x + 4y -11 = 0 c) x - 4y -10 = 0

d) 2x + y - 7 = 0 e) 2x - y -1 = 0

13) (UFJF) Dada a equação da reta r: y = x – 2, a área da região limitada pela reta r, pelo eixo das ordenadas e pela reta s perpendicular à reta r no ponto (3, 1), é:

a) 10 u. a b) 9 u. a c) 18 u. a d) 12 u. a e) 16 u. a

14) (UFJF) A maior altura de um triângulo retângulo isósceles, inscrito numa circunferência de centro no ponto (0, 0), mede 5 cm. A equação dessa circunferência é:

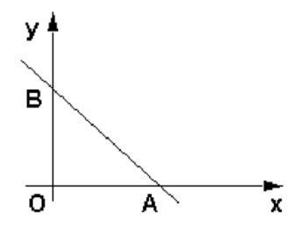
a) $x^2 + y^2 = 25$ b) $x^2 + y^2 = 50$ c) $x^2 + y^2 = 5$

d) $2x^2 + 2y^2 = 25$ e) $4x^2 + 4y^2 = 25$

15) (UFJF) O triângulo AOB, cujos vértices estão sobre os eixos coordenados, como mostra a figura abaixo, é isóscele e tem área 18 cm2. A equação da reta que passa pelos pontos A e B são dadas por:

a) x – y + 6 = 0 b) x + y + 6 = 0 c) 2 + 2y – 6 = 0

d) x + y – 6 = 0 e) x – y – 6 = 0



16) (UFJF) Considere a circunferência e a reta de equações $x^2 + (y-1)^2 = 2$ e y = x + 1, respectivamente. Podemos afirmar que:

a) a reta é tangente à circunferência
b) a reta não intercepta a circunferência
c) a reta é secante a circunferência
d) a reta passa por três pontos da circunferência

17) (UFJF) O raio e o centro da circunferência de equação $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ são, respectivamente:

a) 5, (2, 3) b) $2\sqrt{3}$, (-3, 2) c) 5, (-2, 3) d) $2\sqrt{3}$, (2, -3)

18) (UFJF) Sendo A, B e C os vértices de um triângulo de coordenas (1, 2), (5, 5) e (8, 9), respectivamente, então esse triângulo é:

a) retângulo e não isósceles
b) retângulo e isósceles
c) equilátero
d) isósceles e não retângulo

19) (UFV) O gráfico da equação $x^3y + xy^3 - xy = 0$ consiste de:

a) duas retas e uma parábola
b) duas parábolas e uma reta
c) dois círculos e uma reta
d) duas retas e um círculo
e) um círculo e uma parábola

20) (UFJF) A equação da circunferência no ponto (2, - 4) e tangente ao eixo das ordenadas é dada por:

a) $x^2 + 4x + y^2 - 8y = 16$ b) $x^2 - 4x + y^2 + 8y = -4$

c) $x^2 - 4x + y^2 + 8y = -16$ d) $x^2 - 4x + y^2 + 8y = 16$

21) (UFJF) Consideramos as circunferências C1 e C2 de equações $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ e $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 4 = 0$, respectivamente. É correto afirmar que:

a) C1 é tangente ao eixo das abscissas

b) C1 e C2 se intersectam em um único ponto

c) C1 e C2 se intersectam em dois pontos

d) C1 e C2 não se intersectam

22) (UFJF) Consideramos a reta y = - 2x + 2. Se $P(x_0, y_0)$ é o ponto dessa reta mais próximo da origem dos eixos coordenados, então podemos afirmar que:

a) $x_0 = \frac{2}{5}$ b) $y_0 = \frac{4}{5}$ c) $x_0^2 + y_0^2 = \frac{2}{5}$ d) $x_0^2 + y_0^2 = \frac{4}{5}$

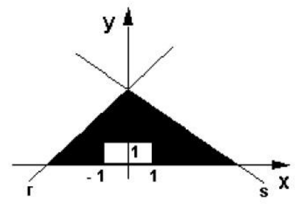
23) (UFJF) Sejam r e s as retas cujas equações são, respectivamente, y = - x + 3 e y = (3/2)x + 3. A área da região sombreada na figura abaixo, em unidades de área, é:

a) 5,5

b) 3,5

c) 11

d) 7



24) (UFV) Considere a equação $x^2 + y^2 - 6x + 4y + p = 0$. O maior valor inteiro de p para que a equação acima represente uma circunferência é:

a) 12 b) 13 c) 14 d) 8 e) 10

25) (UFJF) A uma tela de computador está associado um sistema de coordenadas cartesianas, com origem no canto inferior esquerdo. Um certo programa gráfico pode ser usado para desenhar na tela somente retas de inclinações iguais a 0°, 30°, 45° e 90° em relação ao eixo horizontal. Então, considerando-se os pontos a seguir, o único que não pode estar sobre uma reta , a partir da origem, desenhada por este programa é:

a) $(0, 10\sqrt{3})$ b) $(10\sqrt{3}, 0)$ c) $(10\sqrt{3}, 10\sqrt{3})$

d) $(10\sqrt{3}, 5\sqrt{3})$ e) $(10\sqrt{3}, 10)$

26) (UFJF) Considere, no plano cartesiano, uma circunferência de raio 3, intersectando o eixo x, tangente à reta y = 4 e cujo centro pertence à reta x = 5. A soma das abscissas dos pontos de interseção dessa circunferência com o eixo x é igual a:

a) 6 b) $5 + \sqrt{8}$ c) 10 d) $10 + 2\sqrt{8}$ e) 12

27) (UFJF) Sobre os conjuntos de pontos de interseção da circunferência $x^2 + (y-2)^2 = 2$ com a reta mx – y + 2 = 0 , onde m é real, podemos afirmar que:
a)contém um único ponto

b)é o conjunto vazio

c)contém dois pontos

d)contém três pontos

e)depende de m

28) (UFJF – Adaptada) Os pontos (x, y) que satisfazem a equação $x^2 - y^2 + x + y = 0$
Estão melhor representados:

a) uma circunferência
b) duas retas perpendiculares
c) duas retas paralelas
d) um quadrado
e) uma hipérbole

29) (UFJF) Dada a reta de equação 5x – 3y + 8 = 0 e a circunferência de equação $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$, a equação da reta perpendicular á reta dada, contendo o centro da circunferência, é:

a) 3x + 5y – 7 = 0   b) – 2x + 3y – 2 = 0   c) 3x + 5y – 4 = 0

d) 4x + 6 = 0   e) – 2x + 3 y + 5 = 0

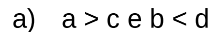
30) (UFJF) As posições relativas dos pontos A(- 1, 2), B(2, 1) e C(1, 1), em relação à circunferência de equação $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$, são:

a) A e B são internos e C está contido na circunferência
b) Os três pontos estão contidos na circunferência
c) A é interno, B é externo e C está contido na circunferência
d) A é externo, B é interno e C está contido na circunferência
e) A, B e C são externos a circunferência

31) (UFJF) Dados os pontos A(1, 3) e B(2, -1), pode-se afirmar que a mediatriz do segmento AB intercepta o eixo Ou no ponto de ordenada igual a:

a) 2   b) ½   c) 5/8   d) 0   e) 2/3

32) (UFJF) Sejam $y = ax + b$ e $y = cx + d$ as equações de duas retas, que se interceptam no ponto P, pertencente ao eixo x, representadas no plano cartesiano abaixo:



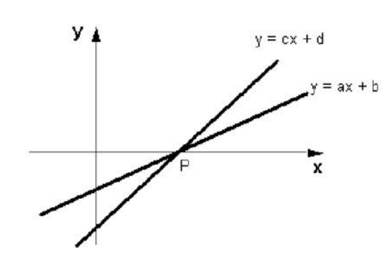
a) $a > c$ e $b < d$

b) $a > c$ e $b > d$

c) $a < c$ e $b < d$

d) $a < c$ e $b > d$

e) $a = c$ e $b < d$

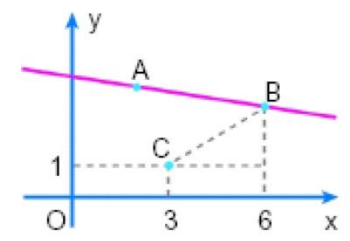


33) (Cesgranrio) Considere os pontos M(0, 0), N(4, 3) e P(–3, 4) do plano xOy. O menor ângulo positivo formado pelas retas MN e MP é:

a) 75° b) 80° c) 85° d) 90°

34) (UFMG) Na figura, A = (2, 3) e BC= $\sqrt{10}$. A equação da reta AB é:

a) $x + 4y - 14 = 0$
b) $x - 4y + 14 = 0$
c) $4x + y - 14 = 0$
d) $4x - y + 14 = 0$

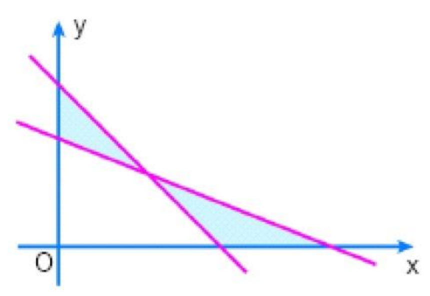


35) (Fuvest) Uma reta r determina, no primeiro quadrante do plano cartesiano, um triângulo isósceles, cujos vértices são a origem e os pontos onde a reta intercepta os eixos Ox e Oy. Se a área desse triângulo é 18, a equação de r é:

a) $x - y = 4$
b) $x + y = 4$
c) $x + y = 2$
d) $x + y = 6$

36) (Cesgranrio) As retas $y = -3x + 3$ e $y = (-x/2) + 2$ mostradas na figura. A área da região colorida é:

a) 2,9 b) 3,0
c) 3,1 d) 3,2



37) (Mack-SP) A reta r, determinada por A(2, –5) e B(3, k), tem coeficiente angular 2k. A equação da reta s paralela à reta r e que passa pela origem é:

a) $10x + y = 0$
b) $x - 10y = 0$
c) $10x - y - 25 = 0$
d) $y = 10x$

38) (UFPE) Qual a área da região no plano cartesiano, determinada pelas desigualdades
$y \le 0$, $x + y \le 10$ $3x - y \le 6$?

a) 24 b) 30 c) 35 d) 60

39) (Santa Casa-SP) Seja 3x –4y + 4 = 0 a equação da reta suporte de um dos lados de um triângulo equilátero. Se um dos vértices desse triângulo é o ponto (1, –2), o seu perímetro é:

a) $2\sqrt{3}$ b) $4\sqrt{3}$ c) $6\sqrt{3}$ d) $8\sqrt{3}$

40) (UFAL - Adaptação) Sejam o ponto P(2, 1) e o ponto Q, de abscissa 4, localizado no 1º quadrante. Se a distância de Q a P é igual à distância de Q ao eixo das abscissas, então Q é um ponto de ordenada:

a) 2 b) 2 2 c) 5/2 d) 3

41) (UFES) A área do triângulo limitado pelas retas y = x, y = 2x e x + y = 6 vale:

a) $\sqrt{2}$ b) 3 c) $3\sqrt{2}$ d) 2

42) (PUC-SP) Os pontos A(–1, 1), B(2, –1) e C(0, –4) são vértices consecutivos de um quadrado ABCD. A equação da reta suporte da diagonal BD desse quadrado é:

a) x + 5y – 3 = 0
b) x – 2y – 4 = 0
c) x – 5y – 7 = 0
e) x + 2y – 3 = 0

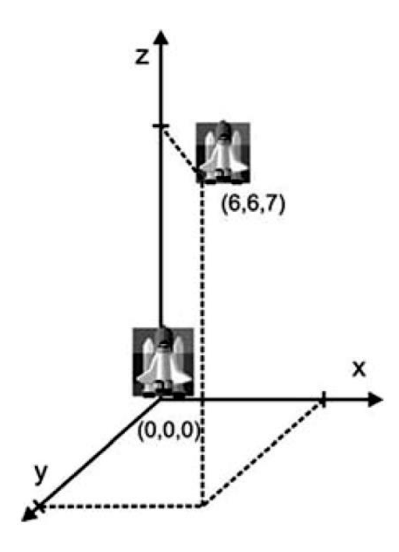
GABARITO

1)a	2)b	3)a	4)a	5)c	6)a	7) a=1;b=2
8)b	9) a- y=1/2x+2 b- y=-2x-3	10)a	11)b	12)a	13)b	14)d
15)d	16)c	17)a	18)d	19)d	20)c	21)d
22)d	23)a	24)a	25)d	26)c	27)c	28)b
29)a	30)c	31)c	32)d	33)d	34)a	35)d
36)a	37)d	38)a	39)c	40)c	41)b	42)c

PINTOU NO ENEM

Questão 1 - (ENEM/2010)

Um foguete foi lançado do marco zero de uma estação e após alguns segundos atingiu a posição (6, 6, 7) no espaço, conforme mostra a figura. As distâncias são medidas em quilômetros.

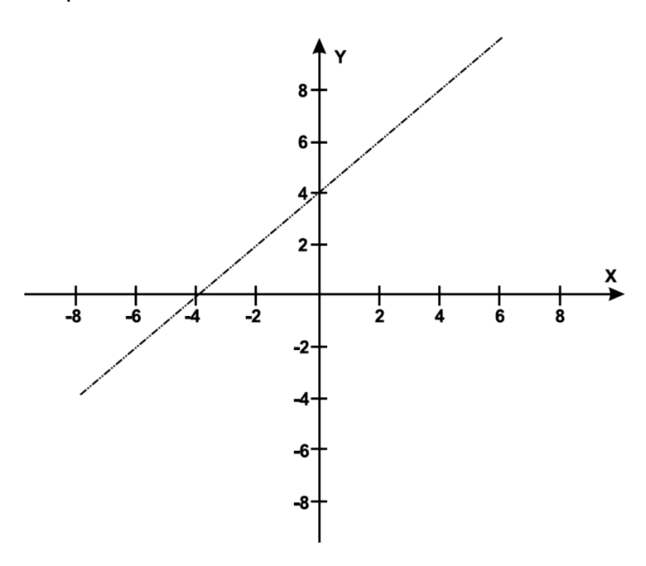


Considerando que o foguete continuou sua trajetória, mas se deslocou 2 km para frente na direção do eixo-x, 3 km para trás na direção do eixo-y, e 11 km para frente, na direção do eixo-z, então o foguete atingiu a posição

a) (17, 3, 9).
b) (8, 3, 18).
c) (6, 18, 3).
d) (4, 9, - 4).
e) (3, 8, 18).

Questão 2 - (ENEM/2011)

Um bairro de uma cidade foi planejado em uma região plana, com ruas paralelas e perpendiculares, delimitando quadras de mesmo tamanho. No plano de coordenadas cartesianas seguinte, esse bairro localiza-se no segundo quadrante, e as distâncias nos eixos são dadas em quilômetros.



A reta de equação $y = x + 4$ representa o planejamento do percurso da linha do metrô subterrâneo que atravessará o bairro e outras regiões da cidade. No ponto $P = (-5, 5)$, localiza-se um hospital público. A comunidade solicitou ao comitê de planejamento que fosse prevista uma estação do metrô de modo que sua distância ao hospital, medida em linha reta, não fosse maior que 5 km.

Atendendo ao pedido da comunidade, o comitê argumentou corretamente que isso seria automaticamente satisfeito, pois já estava prevista a construção de uma estação no ponto

a) (–5, 0).
b) (–3, 1).
c) (–2, 1).
d) (0, 4).
e) (2, 6).

GABARITO

1) B
2) B

Referências

BEZERRA, Manoel Jairo. **Matemática** – 2º Grau. Volume único. São Paulo: Scipione,1995.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: Contexto e Aplicações** – Ensino Médio. Volume 1, Ática, 2007.

FACCHINI, Walter. **Matemática Para a Escola de Hoje** – Ensino Médio. FTD, 2006.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David Mauro. **Matemática** – Volume Único – Ensino Médio. Atual, 2007.

PAIVA, Manuel Rodrigues. **Matemática** – Volumes 1, 2 e 3.1ª Ed. São Paulo: Moderna, 2009.